これでだいじょうぶ！

中2数学の図形の証明

別冊

答えと解説

平行線と角 ①

ズバリ1 対頂角，同位角，錯角の位置関係を知ろう。

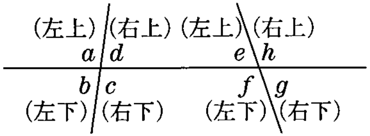
P2・3

1 ① $\angle\boxed{d}$　② $\angle\boxed{g}$

③ $\angle\boxed{f}$　④ $\angle\boxed{g}$

解説 ① 向かいあっている角が対頂角である。$\angle a$ と $\angle c$，$\angle e$ と $\angle g$，$\angle f$ と $\angle h$ も対頂角である。

② 同じ位置関係にある角が同位角である。



上の図のように，それぞれ4つの角を右上，右下，左上，左下と表すと，右上どうし($\angle d$ と $\angle h$)，右下どうし($\angle c$ と $\angle g$)，左上どうし($\angle a$ と $\angle e$)，左下どうし($\angle b$ と $\angle f$)が同じ位置関係にあるといえる。つまり，これらが同位角である。

③ 2直線の内側のたがいちがいにある角が錯角である。$\angle c$ と $\angle e$ も錯角である。

④ 対頂角が等しい角である。

したがって，$\angle a=\angle c$，$\angle b=\angle d$，$\angle f=\angle h$ でもある。

2 ① 対頂角　② 同位角

③ 錯角

解説 ① $\angle b$ と $\angle d$，$\angle e$ と $\angle g$，$\angle f$ と $\angle h$ も対頂角である。

② $\angle a$ と $\angle e$，$\angle b$ と $\angle f$，$\angle c$ と $\angle g$ も同位角である。

③ $\angle b$ と $\angle h$ も錯角である。

3 ① 錯角　② 同位角

③ 対頂角

解説 ① $\angle c$ と $\angle e$ も錯角である。

② $\angle a$ と $\angle e$，$\angle b$ と $\angle f$，$\angle d$ と $\angle h$ も同位角である。

③ $\angle a$ と $\angle c$，$\angle b$ と $\angle d$，$\angle e$ と $\angle g$ も対頂角である。

平行線と角 ②

ズバリ2 対頂角は等しく，平行線の同位角，錯角は等しい。

P4・5

1 ① $\angle x=\boxed{70^\circ}$　② $\angle x=\boxed{50^\circ}$

③ $\angle x=\boxed{35^\circ}$

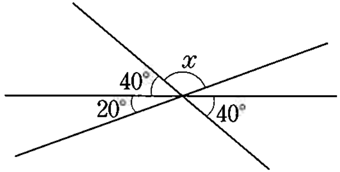
解説 ① 対頂角は等しい。

② 平行な2直線に1つの直線が交わるとき，同位角は等しい。

③ 平行な2直線に1つの直線が交わるとき，錯角は等しい。

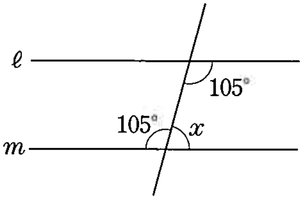
2 ① $\angle x=120°$ ② $\angle x=75°$
③ $\angle x=105°$

解説 ①



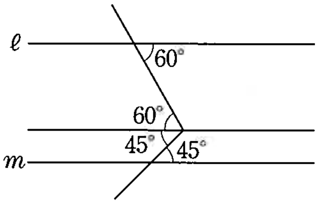
$\angle x=180°-(20°+40°)$
$=180°-60°$
$=120°$

②



$\angle x=180°-105°$
$=75°$

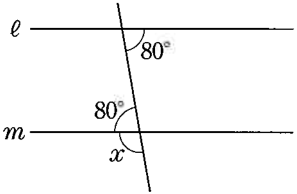
③



$\angle x=60°+45°$
$=105°$

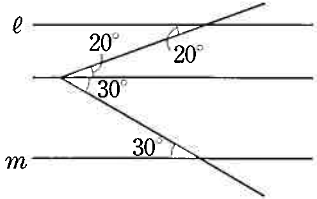
3 ① $\angle x=100°$ ② $\angle x=50°$
③ $\angle x=35°$

解説 ①



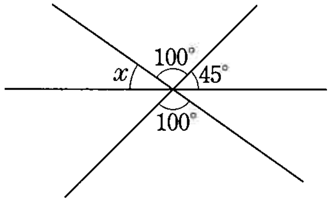
$\angle x=180°-80°$
$=100°$

②



$\angle x=20°+30°$
$=50°$

③



$\angle x=180°-(100°+45°)$
$=180°-145°$
$=35°$

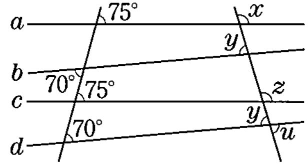
平行線になる条件

ズバリ 3 同位角，錯角が等しければ，２直線は平行。 P6・7

1 ① $a /\!/ \boxed{c}$，$\boxed{b} /\!/ \boxed{d}$
② $\angle x=\angle \boxed{z}$，$\angle \boxed{y}=\angle \boxed{u}$

解説 ① 同位角（75°の角）が等しいので，
$a /\!/ c$
錯角（70°の角）が等しいので，
$b /\!/ d$

② $a /\!/ c$ より，同位角は等しいので，
$\angle x=\angle z$



上の図のように，$b /\!/ d$ より，$\angle y$ の同位角と $\angle u$ が対頂角で等しいので，$\angle y=\angle u$

2 ① $a /\!/ c$，$b /\!/ d$
② $\angle x=\angle z$，$\angle y=\angle u$

解説 ① 45°の右どなりの角は，
$180°-45°=135°$ になるので，錯角が等しいから，$a /\!/ c$
同位角（40°の角）が等しいので，
$b /\!/ d$

② $a /\!/ c$ より，同位角は等しいので，
$\angle x = \angle z$
$b /\!/ d$ より，同位角は等しいので，
$\angle y = \angle u$

3 ① $a /\!/ d$，$b /\!/ c$
② $\angle x = \angle u$，$\angle y = \angle z$

解説 ① 60° の右どなりの角は，
$180° - 60° = 120°$ になるので，錯角が等しいから，$a /\!/ d$
125° の左どなりの角は，
$180° - 125° = 55°$ になるので，同位角が等しいから，$b /\!/ c$
② $a /\!/ d$ より，同位角は等しいので，
$\angle x = \angle u$
$b /\!/ c$ より，錯角は等しいので，
$\angle y = \angle z$

三角形の内角と外角

ズバリ 4 三角形の内角の和は180°，外角はそのとなりにない２つの内角の和に等しい。 P8・9

1 ① $\angle x = \boxed{40°}$ ② $\angle x = \boxed{138°}$
③ $\angle x = \boxed{63°}$

解説 ① $\angle x = 180° - (50° + 90°)$
$= 180° - 140°$
$= 40°$
② $\angle x = 23° + 115°$
$= 138°$
③ $\angle x = 99° - 36°$
$= 63°$

2 ① $\angle x = 29°$ ② $\angle x = 103°$
③ $\angle x = 50°$

解説 ① $\angle x = 180° - (26° + 125°)$
$= 180° - 151°$
$= 29°$
② $\angle x = 66° + 37°$
$= 103°$
③ $\angle x = 135° - 85°$
$= 50°$

3 ① $\angle x = 135°$ ② $\angle x = 41°$
③ $\angle x = 13°$

解説 ① $\angle x = 71° + 64°$
$= 135°$
② 三角形の内角と外角の関係から，
$20° + x = 35° + 26°$
$x = 35° + 26° - 20°$
$x = 41°$
③ $\angle x = 180° - (24° + 143°)$
$= 180° - 167°$
$= 13°$

多角形の内角の和

ズバリ 5 n 角形の内角の和は 180°×(n−2)！ P10・11

1 ① 六角形は，１つの頂点からひいた対角線によって，$\boxed{4}$個の三角形に分けられる。
したがって，六角形の内角の和は，
$180° \times \boxed{4} = \boxed{720°}$ $\boxed{720°}$
② 七角形の内角の和は，
$180° \times \boxed{5} = \boxed{900°}$
$\boxed{900°} - (120° + 100° + 150° + 175° + 130° + 120°) = \boxed{105°}$ $\angle x = \boxed{105°}$

2 ① 内角の和 1080°
１つの内角 135°
② $\angle x = 70°$

解説 ① 内角の和は，$180° \times (8-2)$ で求める。
正八角形の内角の大きさは，すべて等しいので，八角形の内角の和を 8 でわる。
② まず，五角形の内角の和を求めてから，$\angle x$ のとなりの内角を求める。
$180° \times 3 = 540°$
$540° - (80° + 140° + 90° + 120°)$
$= 110°$
$180° - 110° = 70°$

③ ① $\angle x=37^\circ$

② **六角形**

解説 ① 六角形の内角の和を求めてから，$\angle x$のとなりの内角を求める。

$180^\circ\times4=720^\circ$

$720^\circ-(130^\circ+100^\circ+120^\circ+127^\circ+100^\circ)=143^\circ$ ←80°の角のとなりの内角

$180^\circ-143^\circ=37^\circ$

② $180^\circ\times(n-2)=720^\circ$

$n-2=4$

$n=6$

多角形の外角の和

ズバリ 6 多角形の外角の和は360°！ P12・13

① ① **360°**

② **多角形の外角の和は$\boxed{360^\circ}$だから，**

$\boxed{360^\circ}-(80^\circ+70^\circ+70^\circ+60^\circ)$

$=\boxed{80^\circ}$ **$\angle x=\boxed{80^\circ}$**

解説 外角の和とは，各頂点で1つずつとった外角の和のことであり，多角形の外角の和は360°になる。

② ① **外角の和 360°**

1つの外角 45°

② **$\angle x=75^\circ$**

解説 ① 八角形の外角の和は360°で，正八角形の8つの外角は，すべて等しいので，外角の和を8でわって求める。

② $360^\circ-(110^\circ+55^\circ+120^\circ)=75^\circ$

60°の角のとなりの外角

③ ① **$\angle x=100^\circ$**

② **正二十角形**

解説 ② $18^\circ\times n=360^\circ$

$n=20$

多角形の名称は，漢字で書く。正20角形と書かないように，注意しよう。

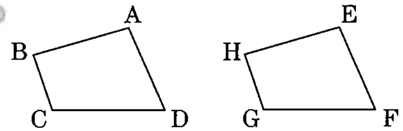
合同な図形の性質

ズバリ 7 合同な図形では，対応する線分の長さや，角の大きさは等しい。P14・15

① ① **頂点H** ② **辺EF**

③ **∠G**

解説



一方が裏返しになっているので，対応する頂点に気をつける。

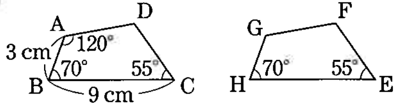
四角形ABCD≡四角形EHGFである。

② ① **四角形ABCD≡四角形GHEF**

② **9cm**

③ **∠F=115°**

解説



② 辺EHに対応する辺は，辺CBだから9 cm

③ ∠Fに対応する角は，∠D

よって，

$360^\circ-(120^\circ+70^\circ+55^\circ)$

$=360^\circ-245^\circ$

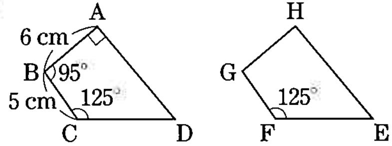
$=115^\circ$

③ ① **四角形ABCD≡四角形HGFE**

② **5cm**

③ **∠E=50°**

解説



② 辺FGに対応する辺は，辺CBだから5 cm

③ ∠Eに対応する角は，∠D

よって，

$360^\circ-(90^\circ+95^\circ+125^\circ)$

$=360^\circ-310^\circ$

$=50°$

三角形の合同条件

ズバリ8 三角形の合同条件を完ペキにおぼえよう。 P16・17

1 ① △$\boxed{ABC}$≡△$\boxed{ADC}$
$\boxed{\text{3組の辺が，それぞれ等しい。}}$

② △$\boxed{ABC}$≡△$\boxed{DEC}$
$\boxed{\text{1組の辺とその両端の角が，それぞれ等しい。}}$

③ △$\boxed{ACF}$≡△$\boxed{AEB}$
$\boxed{\text{2組の辺とその間の角が，それぞれ等しい。}}$

解説 ① AB＝AD，BC＝DC，ACは共通だから，AC＝AC

② BC＝EC，∠B＝∠E，対頂角だから，∠ACB＝∠DCE

③ AC＝AB＋BC
＝AF＋FE
＝AE
だから，AC＝AE,
AF＝AB,
∠Aは共通だから，∠A＝∠A
なお，三角形の合同条件は，
・**3辺**がそれぞれ等しい。
・**2辺**とその間の角がそれぞれ等しい。
・**1辺**とその両端の角がそれぞれ等しい。

というように表現することもある。

仮定と結論

ズバリ9 「ならば」の前が仮定，「ならば」のあとが結論。 P18・19

1 ① 仮定：$\boxed{△ABC≡△DEF}$
結論：$\boxed{∠A=∠D}$

② 仮定：$\boxed{x\text{が8の倍数}}$
結論：$\boxed{x\text{は2の倍数}}$

③ 仮定：$\boxed{\text{正三角形である。}}$
結論：$\boxed{\text{3つの角は等しい。}}$

解説 ③ 「正三角形ならば，3つの角は等しい。」と，書きかえるとわかりやすい。

2 ① 仮定：$\ell \perp m$，$\ell \perp n$
結論：$m /\!/ n$

② 仮定：△ABCで，∠A＋∠B＝90°
結論：△ABCは直角三角形である。

③ 仮定：合同な図形である。
結論：面積は等しい。

解説 ③ 「合同な図形ならば，面積は等しい。」と，書きかえるとわかりやすい。

3 ① 仮定：$a<0$，$b<0$
結論：$ab>0$

② 仮定：3辺が等しい三角形である。
結論：正三角形である。

③ 仮定：2直線が平行である。
結論：錯角は等しい。

解説 ② 「3辺が等しい三角形ならば，正三角形である。」と，書きかえるとわかりやすい。

証明のしくみ

ズバリ10 証明は，根拠となることがらに注意して，すじ道をまとめる！ P20・21

1 △ABCと△BADで，
仮定より，
AC＝BD…①
BC＝AD…② → $\boxed{\text{仮定}}$
また，ABは共通だから，
AB＝BA…③
①，②，③から，
$\boxed{\text{3組の辺}}$が，それぞれ等しいので，
△ABC≡△BAD
合同な図形では，対応する$\boxed{\text{角}}$の大きさは等しいので，
∠C＝∠D → $\boxed{\text{結論}}$

解説 あることがらが成り立つことを，すじ道を立てて明らかにすることを証明という。証明では，仮定から結論を導くために，すでに正しいと認められていることがらを根拠として使う。

したがって，根拠となることがらは，

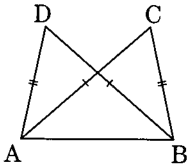
きちんとおぼえ，証明をするときに使えるようにしておかないといけない。

この問題での根拠となることがらは，三角形の合同条件と合同な図形の性質である。

証明の進め方 ①

ズバリ 11 証明のポイント…仮定と結論をはっきりさせる！ P22・23

① −1



仮定：AC＝BD　結論：∠C＝∠D
　　　BC＝AD

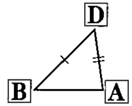
解説 「ならば」の前が仮定で，「ならば」のあとが結論になる。

証明をするときに，仮定は根拠，結論は証明するそのものになる。

証明の進め方 ②

ズバリ 12 証明のポイント…証明する三角形を示し，等しい辺や角を見つける！ P24・25

① −2



△ABCと△BAD

また，AB は共通だから，
AB＝BA…③

解説 ∠C, ∠D をふくむ三角形をとりあげる。

証明の進め方 ③

ズバリ 13 証明のポイント…合同条件を示し，整理して書けば証明は完成！ P26・27

① −3 仮定より，AC＝BD…①
BC＝AD…②
また，AB は共通だから，
AB＝BA…③
①，②，③から，３組の辺が，それぞれ等しいので，△ABC≡△BAD

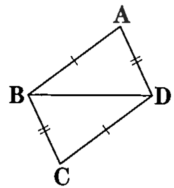
〔証明〕
△ABC と△BAD で，
仮定より，AC＝BD…①
BC＝AD…②
また，AB は共通だから，
AB＝BA…③
①，②，③から，３組の辺が，それぞれ等しいので，
△ABC≡△BAD
合同な図形では，対応する角の大きさは等しいので，
∠C＝∠D

解説 証明は，書き方の手順に慣れることが重要である。最終的には，仮定から結論を導く証明のすべてを，自分１人で書くことになるので，本書を解き進めながら，証明の書き方をしっかり身につけよう。

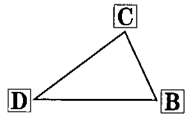
三角形の合同の証明 ①

ズバリ 14 3 組の辺が，それぞれ等しければ，2 つの三角形は合同。 P28・29

① (1) 仮定 AB＝CD
BC＝DA



(2) △ABD と△CDB



(3) BD は共通だから，BD＝DB

(4) ①，②，③から，

3組の辺が，それぞれ等しい。

(5) 結論 △ABD≡△CDB

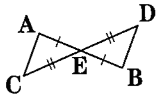
解説 「共通」ということばは，証明でよく使うのでおぼえておこう。

三角形の合同の証明 ②

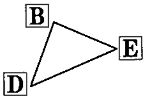
ズバリ 15 2組の辺とその間の角が，それぞれ等しければ，2つの三角形は合同。 P30〜33

① (1) 仮定 AE＝BE

CE＝DE



(2) △ACE と△BDE



(3) 対頂角は等しいから，

∠AEC＝∠BED

(4) ①，②，③から，

2組の辺とその間の角が，それぞれ等しい。

(5) 結論 △ACE≡△BDE

解説 E は AB，CD の中点だから，2つの三角形の対応する辺が等しくなることに注目する。

② △ABO と△DCO で，

仮定より，

AO＝DO…①

BO＝CO…②

また，対頂角は等しいから，

∠AOB＝∠DOC…③

①，②，③から，2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

△ABO≡△DCO

解説 ①と同じように考えて証明していくことになる。

③ △ABC と△DCE で，

仮定より，

BC＝CE…①

AB＝DC…②

AB∥DC から，平行線の同位角は等しいので，

∠ABC＝∠DCE…③

①，②，③から，2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

△ABC≡△DCE

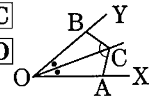
解説 図の中に平行線があるときは，錯角や同位角が等しいことをよく使うので，おぼえておこう。

三角形の合同の証明 ③

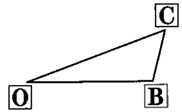
ズバリ 16 1組の辺とその両端の角が，それぞれ等しければ，2つの三角形は合同。 P34〜37

① (1) 仮定 ∠AOC＝∠BOC

∠ACO＝∠BCO



(2) △AOC と△BOC



(3) OC は共通だから，OC＝OC

(4) ①，②，③から

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

(5) 結論 △AOC≡△BOC

解説 仮定から，2組の角が等しいことを読みとる。

② △ABD と△ACE で，

仮定より，

AB＝AC…①

∠ABD＝∠ACE…②

また，∠A は共通だから，

∠A＝∠A…③

①，②，③から，1組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，

△ABD≡△$\underline{\text{ACE}}$

解説 辺については，仮定に書いてあるだけなので，「１組の辺とその両端の角が，それぞれ等しい。」という合同条件が使えそうな予想ができる。

したがって，その両端の角に注目して考える。

③ **△ADE と△FCE で，**

仮定より，AD∥BC から，平行線の錯角は等しいので，

∠ADE＝∠FCE…①

E は CD の中点だから，

DE＝CE…②

また，対頂角は等しいから，

∠AED＝∠FEC…③

①，②，③から，１組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，

△ADE≡△FCE

解説 この問題でも，辺の長さの情報は１つ（辺 CD の中点）しかないので，その両端の角に注目する。

二等辺三角形の性質

ズバリ 17 二等辺三角形の２つの底角は等しい。 P38・39

① ① $\angle x=\boxed{70^\circ}$　② $\angle x=\boxed{74^\circ}$

③ $\angle x=\boxed{54^\circ}$

解説 ① △ABC は，AB＝AC の二等辺三角形だから，∠B＝∠C

したがって，$\angle x=70^\circ$

② $\angle x=(180^\circ-32^\circ)\div 2$

$=148^\circ\div 2$

$=74^\circ$

③ $\angle ACB=180^\circ-117^\circ$

$=63^\circ$

$\angle x=180^\circ-63^\circ\times 2$

$=180^\circ-126^\circ$

$=54^\circ$

② ① $\angle x=90^\circ$　② $\angle x=68^\circ$

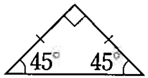
③ $\angle x=62^\circ$

解説 ① $\angle x=180^\circ-45^\circ\times 2$

$=180^\circ-90^\circ$

$=90^\circ$

このように，頂角が90°である二等辺三角形を，直角二等辺三角形という。



② $\ell\,/\!/\,m$ より，錯角は等しいので，

$\angle ABC=68^\circ$

$\angle ABC=\angle ACB$ だから，$\angle x=68^\circ$

③ $\angle ACB=180^\circ-121^\circ$

$=59^\circ$

$\angle x=180^\circ-59^\circ\times 2$

$=180^\circ-118^\circ$

$=62^\circ$

③ ① $\angle x=30^\circ$　② $\angle x=80^\circ$

③ $\angle x=84^\circ$

解説 ① $\angle ACB=180^\circ-105^\circ=75^\circ$

$\angle ACB=\angle ABC=75^\circ$ だから，

$\angle x=105^\circ-75^\circ=30^\circ$

② $\angle ABC=\angle ACB=40^\circ$ だから，

$\angle x=40^\circ+40^\circ=80^\circ$

③ $\angle ABC=\angle ACB=24^\circ$ だから

$\angle CAD=24^\circ+24^\circ=48^\circ$

$\angle x=180^\circ-48^\circ\times 2$

$=180^\circ-96^\circ$

$=84^\circ$

二等辺三角形の性質を利用した証明

ズバリ 18 二等辺三角形の性質を利用して証明しよう。 P40・41

① (1) **△EBC と△$\boxed{\text{DCB}}$**

(2) **△EBC と△$\boxed{\text{DCB}}$で，**

仮定より，

∠EBC＝∠$\boxed{\text{DCB}}$…①

BD，CE は，それぞれ∠B，∠C の二等分線だから，

∠ECB＝∠$\boxed{\text{DBC}}$…②

また，BC は$\boxed{\text{共通}}$だから，

BC＝$\boxed{\text{CB}}$…③

①，②，③から，$\boxed{\text{1 組の辺}}$と$\boxed{\text{その両端の角}}$が，それぞれ等しいので，

△EBC≡△$\boxed{\text{DCB}}$

合同な図形では，$\boxed{\text{対応する}}$辺の長さは等しいので，

BE＝$\boxed{\text{CD}}$

解説 (1) BE と CD をふくむ三角形をとりあげるので，△EBC と△DCB になる。

(2) 仮定から，2 組の角が等しいことを読みとる。

二等辺三角形になることの証明

ズバリ 19 2 つの辺か，2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形。 P42～45

1 (1) △ABC と△$\boxed{\text{DCB}}$

(2) △ABC と△$\boxed{\text{DCB}}$で，

仮定より，

AB＝$\boxed{\text{DC}}$…①

AC＝$\boxed{\text{DB}}$…②

また，BC は$\boxed{\text{共通}}$だから，

BC＝$\boxed{\text{CB}}$…③

①，②，③から，$\boxed{\text{3 組の辺}}$が，それぞれ等しいので，

△ABC≡△$\boxed{\text{DCB}}$

合同な図形では，$\boxed{\text{対応する}}$角の大きさは等しいので，

∠ACB＝∠$\boxed{\text{DBC}}$

つまり，

∠ECB＝∠$\boxed{\text{EBC}}$

したがって，△EBC は$\boxed{\text{2 つの角}}$が等しいので，二等辺三角形である。

解説 (1) △EBC が二等辺三角形であることを証明するためには，EB＝EC か，∠EBC＝∠ECB を示すことになる。

たとえば，EB と EC をふくむ，△ABE と△DCE を考えてみる。

仮定から，AB＝DC

対頂角は等しいから，

∠AEB＝∠DEC

これ以上は見つからないので，EB＝EC を示すことはできない。

したがって，△ABC と△DCB をとりあげ，∠EBC＝∠ECB を示す。

(2) 仮定から，2 組の辺が等しいことを読みとる。

2 (1) △DBC と△ECB

(2) △DBC と△ECB で，

仮定より，

DB＝EC…①

DC＝EB…②

また，BC は共通だから，

BC＝CB…③

①，②，③から，3 組の辺が，それぞれ等しいので，

△DBC≡△ECB

合同な図形では，対応する角の大きさは等しいので，

∠DBC＝∠ECB

つまり，∠ABC＝∠ACB

したがって，△ABC は 2 つの角が等しいので，二等辺三角形である。

解説 (1) △ABC が二等辺三角形であることを証明するためには，AB＝AC か，∠ABC＝∠ACB を示すことになる。

たとえば，AB と AC をふくむ，△ABE と△ACD を考えてみる。

仮定から，EB＝DC

∠A は共通だから，∠A＝∠A

これ以上は見つからないので，AB＝AC を示すことはできない。

したがって，△DBC と△ECB をとりあげ，∠ABC＝∠ACB を示す。

また，もう 1 つの考えとして，証明をする際に仮定にあたることがらは，かならず利用する。

ここでは，DB＝EC，DC＝EB が

仮定にあたる。

よって，これらの辺をふくむ三角形が使われると考えれば，とりあげる三角形が，△DBC と△ECB だとわかる。

(2) 仮定から，２組の辺が等しいことを読みとる。

③ △DBC と△ECB で，

仮定より，

△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形で，

D，E は AB，AC の中点だから，

DB＝EC…①

二等辺三角形の底角は等しいから，

∠DBC＝∠ECB…②

また，BC は共通だから，

BC＝CB…③

①，②，③から，２組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

△DBC≡△ECB

合同な図形では，対応する角の大きさは等しいので，∠DCB＝∠EBC

つまり，∠FCB＝∠FBC

したがって，△FBC は２つの角が等しいので，二等辺三角形である。

解説　△FBC が二等辺三角形であることを証明するためには，FB＝FC か，∠FBC＝∠FCB を示すことになる。

たとえば，FB と FC をふくむ，△FBD と△FCE を考えてみる。

仮定から，DB＝EC

対頂角は等しいから，∠DFB＝∠EFC

これ以上は見つからないので，FB＝FC は示せない。

したがって，△DBC と△ECB をとりあげ，∠FBC＝∠FCB を示す。

正三角形の性質を利用した証明

ズバリ20 正三角形の性質を利用して証明しよう。 P46・47

① (1) △BDA と△$\boxed{\text{CEA}}$

(2) △BDA と△$\boxed{\text{CEA}}$で，

△ABC と△ADE が正三角形だから，

AB＝$\boxed{\text{AC}}$…①

AD＝$\boxed{\text{AE}}$…②

また，∠BAC＝∠DAE＝$\boxed{60}$°

∠BAD＝$\boxed{60}$°－∠DAC

∠CAE＝$\boxed{60}$°－∠DAC

よって，

∠BAD＝∠$\boxed{\text{CAE}}$…③

①，②，③から，$\boxed{\text{２組の辺}}$と$\boxed{\text{その間の角}}$が，それぞれ等しいので，

△BDA≡△$\boxed{\text{CEA}}$

合同な図形では，$\boxed{\text{対応する}}$辺の長さは等しいので，

BD＝$\boxed{\text{CE}}$

解説　(1) BD と CE をふくむ三角形をとりあげるので，△BDA と△CEA になる。

(2) △ABC，△ADE が正三角形だから，３つの辺と３つの角がそれぞれ等しいことに注目する。

２組の辺が等しいことは，すぐに見つかると思われる。

この問題のポイントは，その２組の辺の間の角が等しいことを示すことにある。

∠BAD＝60°－∠DAC

∠CAE＝60°－∠DAC

このように，同じ式で表して，等しい関係を示す。

証明問題で，よく使われる方法だから，表し方をおぼえよう。

直角三角形の合同条件

ズバリ21 直角三角形の合同条件をおぼえよう！ P48・49

① ① △$\boxed{\text{ABD}}$≡△$\boxed{\text{CDB}}$

$\boxed{\text{斜辺と他の１辺が，それぞれ等しい。}}$

② △$\boxed{\text{ABC}}$≡△$\boxed{\text{ADC}}$

$\boxed{\text{斜辺と１つの鋭角が，それぞれ等しい。}}$

解説　① △ABD と△CDB で，

∠BAD＝∠DCB＝90°
BD＝DB(斜辺)
AB＝CD(他の１辺)

② △ABC と△ADC で，
∠ABC＝∠ADC＝90°
AC＝AC(斜辺)
∠BAC＝∠DAC(１つの鋭角)

直角三角形の合同条件には，かならず「斜辺」ということばがはいる。三角形の合同条件ときちんと区別しておこう。

直角三角形の合同条件を利用した証明

ズバリ22 直角三角形の合同を利用して証明しよう。 P50～53

1 (1) △BEC≡△$\boxed{\text{CDB}}$

(2) △BEC と△$\boxed{\text{CDB}}$で，
仮定より，
∠BEC＝∠$\boxed{\text{CDB}}$＝$\boxed{90}$°…①
BC は$\boxed{\text{共通}}$だから，
BC＝$\boxed{\text{CB}}$…②
△ABC は二等辺三角形だから，
∠EBC＝∠$\boxed{\text{DCB}}$…③
①，②，③から，直角三角形の$\boxed{\text{斜辺と１つの鋭角}}$が，それぞれ等しいので，
△BEC≡△$\boxed{\text{CDB}}$
合同な図形では，$\boxed{\text{対応する}}$辺の長さは等しいので，
BE＝$\boxed{\text{CD}}$

解説 (1) BE と CD をふくむ三角形をとりあげるので，△BEC と△CDB になる。
(2) 直角三角形の合同を証明するときは，かならず，下の２つの点を示す。
∠BEC＝∠CDB＝90°…直角
BC＝CB…斜辺
つまり，「直角がある」，「斜辺が等しい」ということである。
あとは他の１辺，あるいは，１つの鋭角が等しいかどうかを調べることになる。

2 (1) △ABP と△AHQ

(2) △ABP と△AHQ で，
仮定より，
∠ABP＝∠AHQ＝90°…①
AP＝AQ…②
また，
∠BAP＝90°－∠PAH
∠HAQ＝90°－∠PAH
よって，
∠BAP＝∠HAQ…③
①，②，③から，直角三角形の斜辺と１つの鋭角が，それぞれ等しいので，
△ABP≡△AHQ
合同な図形では，対応する辺の長さは等しいので，
PB＝QH

解説 (1) PB と QH をふくむ三角形をとりあげるので，△ABP と△AHQ になる。
(2) 直角と斜辺は，すぐに見つけられると思うが，もう１つの要素が辺になるのか，鋭角になるのかを考える。
∠PAH をふくんで，∠BAH と∠PAQ が90°になっていることに気づこう。

3 △EBD と△FCD で，
仮定より，
∠DEB＝∠DFC＝90°…①
D は BC の中点だから，
BD＝CD…②
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形だから，
∠EBD＝∠FCD…③
①，②，③から，直角三角形の斜辺と１つの鋭角が，それぞれ等しいので，
△EBD≡△FCD
合同な図形では，対応する辺の長さは等しいので，
BE＝CF

解説 BE と CF をふくむ三角形をとりあげ

るので，△EBD と△FCD になる。

△ABC が二等辺三角形だから，底角が等しいことを利用する。

平行四辺形の性質

ズバリ23 平行四辺形の性質を利用して求めよう。 P54・55

1 ① AD：$\boxed{15}$cm　　CD：$\boxed{12}$cm

② ∠A：$\boxed{65}$°　　∠B：$\boxed{115}$°

③ AO：$\boxed{6}$cm　　DO：$\boxed{5}$cm

解説 ① 平行四辺形の２組の向かいあう辺は，それぞれ等しいから，

AD＝BC＝15cm

CD＝BA＝12cm

② 平行四辺形の２組の向かいあう角は，それぞれ等しいから，

∠A＝∠C＝65°

∠B＝∠D＝115°

③ 平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるから，

AO＝CO＝6cm

DO＝BO＝5cm

2 ① ED：6cm　　GB：4cm

② ∠B：130°　　∠C：50°

③ AO：8cm　　DB：12cm

解説 ① ∠DHI＝∠HCF＝100° より，同位角が等しいので，GH∥BC∥AD

∠DHI＝∠EIG＝100° より，同位角が等しいので，DC∥EF∥AB

よって，

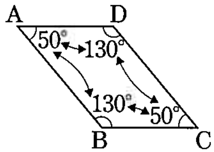
ED＝10－4

＝6(cm)

GB＝7－3

＝4(cm)

② 右の図のように，平行四辺形では，となりどうしの角をたすと，180° になる。



したがって，平行四辺形では，１つの内角の大きさがわかれば，残りの内角も求められる。

この問題では，下のようになる。

∠B＝∠D＝130°

∠C＝180°－130°

＝50°

③ O は AC，DB の中点になる。

よって，

AO＝16÷2

＝8(cm)

DB＝6×2

＝12(cm)

3 ① ∠CAD：40°　∠ACB：40°

② EC：8cm　　AE：2cm

③ ∠ACB：30°　∠BAC：35°

解説 ① ∠D＝∠B＝70°

△ACD で，内角の和は180° だから，

∠CAD＝180°－(70°＋70°)

＝180°－140°

＝40°

AD∥BC より，錯角は等しいから，

∠ACB＝∠CAD＝40°

これまでに勉強してきた，三角形の内角の和や，平行線の性質を利用して求める。

② ∠B＝180°－120°

＝60°

∠BCD＝∠A＝120° だから，

∠BCE＝120°－60°

＝60°

△EBC で，∠B＝∠BCE＝60° だから，

∠BEC＝180°－(60°＋60°)

＝180°－120°

＝60°

つまり，△EBC は正三角形である。

したがって，

EC＝BC＝AD＝8cm

また，EB＝8cm だから，

AE＝10−8

＝2(cm)

③ AD∥BC より，錯角は等しいから，

$\angle$ACB＝$\angle$CAD＝30°

△ABC で，内角の和は180°だから，

$\angle$BAC＝180°−(115°＋30°)

＝180°−145°

＝35°

図形の問題は，図形の性質をおぼえていないと解けないので，図形の基本性質は，かならずおぼえてしまおう。

平行四辺形の性質を利用した証明

ズバリ 24 平行四辺形の性質を利用して証明しよう。 P56・57

❶ (1) **△AEO と△$\boxed{\text{CFO}}$**

(2) **△AEO と△$\boxed{\text{CFO}}$で，**

平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるから，

AO＝$\boxed{\text{CO}}$…①

$\boxed{\text{対頂角}}$は等しいから，

$\angle$AOE＝$\angle\boxed{\text{COF}}$…②

AB∥DC で，$\boxed{\text{錯角}}$は等しいから，

$\angle$OAE＝$\angle\boxed{\text{OCF}}$…③

①，②，③から，$\boxed{\text{1組の辺}}$と$\boxed{\text{その両端の角}}$が，それぞれ等しいので，

△AEO≡△$\boxed{\text{CFO}}$

合同な図形では，$\boxed{\text{対応する}}$辺の長さは等しいので，

AE＝$\boxed{\text{CF}}$

解説 (1) AE と CF をふくむ三角形をとりあげるので，△AEO と△CFO になる。

(2) この問題では，「平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わる」という平行四辺形の性質を利用して証明する。

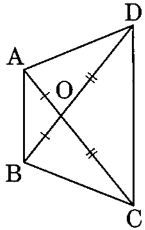
証明問題で平行四辺形がでてきたときには，平行四辺形の性質(辺，角，対角線について)をすぐに使えるようにしておくこと。

平行四辺形になる条件

ズバリ 25 平行四辺形かどうかは，平行四辺形になる条件で判断！ P58・59

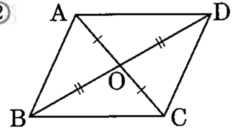
❶ ① $\boxed{\times}$　② $\boxed{○}$　③ $\boxed{○}$

解説 ①



左の図のように，台形にもなる。

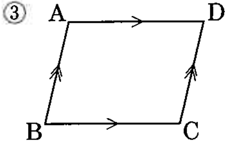
②



左の図のように，対角線が，それぞれの中点で交わる。

したがって，平行四辺形になる。

③



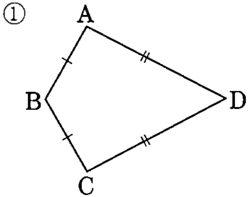
左の図のように，2組の向かうあう辺が，それぞれ平行になる。

したがって，平行四辺形になる。

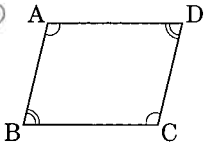
このように，それぞれ図をかいてみて，平行四辺形になる条件にあてはまるかを考える。また，①のように反例をあげてみるのもよい。

❷ ① ×　② ○　③ ○

解説 ①

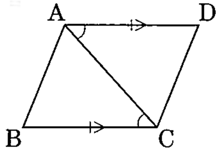


左のような図形にもなるので，平行四辺形にならない。

② 

左の図のように，2組の向かいあう角が，それぞれ等しくなる。

したがって，平行四辺形になる。

③ 

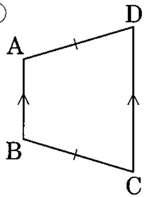
左の図のように，$\angle ACB = \angle CAD$ より，錯角が等しいので，$AD /\!/ BC$ となる。

つまり，1組の向かいあう辺が，等しくて平行となる。

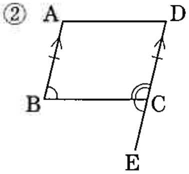
したがって，平行四辺形になる。

③のように，図をかくことによって，$\angle ACB$ と $\angle CAD$ が錯角の位置にあることがよくわかる。図をかいて考えることのよさを理解してほしい。

3 ① ×　② ○　③ ×

解説 ① 

左の図のように，台形にもなる。

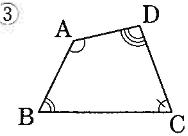
② 

左の図のように，$\angle B + \angle C = 180°$ より，$\angle B = \angle BCE$ となる。

錯角が等しいので，$AB /\!/ DC$ となる。

つまり，1組の向かいあう辺が，等しくて平行となる。

したがって，平行四辺形になる。

③ 

左の図のように，四角形であれば，4つの角の和はいつも360°となる。

したがって，平行四辺形にならない。

平行四辺形の定義をふくめて，平行四辺形になる条件は，5つある。

・2組の向かいあう辺が，それぞれ平行である。(定義)
・2組の向かいあう辺が，それぞれ等しい。
・2組の向かいあう角が，それぞれ等しい。
・対角線が，それぞれの中点で交わる。
・1組の向かいあう辺が，等しくて平行である。

平行四辺形の性質と重なる内容が多いので，それぞれきちんとおぼえよう。なお，「向かいあう辺」を「対辺」，「向かいあう角」を「対角」と表現することもある。

平行四辺形であることの証明

ズバリ26 平行四辺形になる条件を利用して証明しよう。 P60~63

1 **四角形 EBFD で，**

$AD /\!/ BC$ より，

$ED /\!/ \boxed{BF}$ …①

仮定より，

$AE = \boxed{CF}$

平行四辺形の向かいあう辺だから，

$AD = \boxed{BC}$

$ED = AD - \boxed{AE}$，

$BF = BC - \boxed{CF}$

よって，

$ED = \boxed{BF}$ …②

①，②より，$\boxed{\text{1組の向かいあう辺}}$が，$\boxed{\text{等しくて平行である}}$ので，四角形 EBFD は$\boxed{\text{平行四辺形}}$である。

解説 平行四辺形であることを証明するには，定義をふくめて5つの平行四辺形になる条件にあてはまるかを考える。

この問題では，$AD /\!/ BC$ より，$ED /\!/ BF$ はすぐに見つけられる。1組の向かいあう辺が平行であるから，平行四

辺形になる条件としては,

・２組の向かいあう辺が，それぞれ平行である。

・１組の向かいあう辺が，等しくて平行である。

この２つの条件にしぼられる。

したがって，あとはEB∥DFになるのか，ED＝BFになるのかを調べればよい。

このように，平行四辺形であることの証明問題では，何か１つ手がかり(ここでは，ED∥BF)が求められれば，どの条件を使えばよいか，おのずとしぼられてくる。

証明問題は，書き方の手順さえおさえてしまえば，思っているほどむずかしくはないのである。

2 **▱ABCDの対角線ACとBDの交点をOとすると，OA＝OC，OB＝OD…①**

▱AECFで，対角線EFはACの中点Oで交わるから，OE＝OF…②

①，②より，対角線がそれぞれの中点で交わるから，四角形BFDEは平行四辺形である。

3 **▱ABCDの対角線の交点をOとする。**

平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるので，

OA＝OC…①

OB＝OD…②

①とAE＝CGから，OE＝OG…③

②とBF＝DHから，OF＝OH…④

③，④より，対角線がそれぞれの中点で交わるから，四角形EFGHは平行四辺形である。