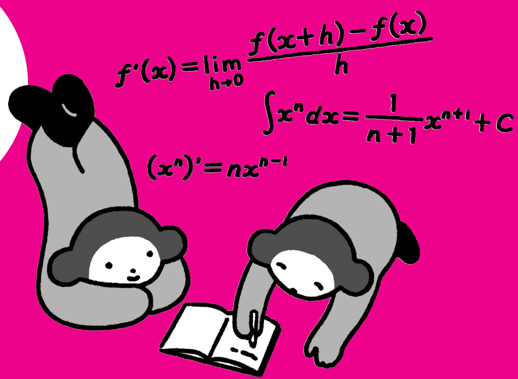
解きながら楽しむ

大人の数学

2次関数と微分・積分編



別冊解答書

答えと解き方

KUMON

1 P.4-5 1次関数って何？

1 (1) 2次式　(2) 3次式
(3) 3次式　(4) 1次式

2 (1) [x] 2次式、[y] 5次式
(2) [a] 1次式、[c] 5次式

3 ア、エ、オ

4 (1) $y=2\pi x$　(2) $y=80x+20$

5 (1) 8　(2) -2　(3) 4　(4) 14

6 (1)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16

(2)

x	-4	-2	0	2	4	6
y	3	2	1	0	-1	-2

解き方

1 (1) $3\underbrace{x^2}_{x\times x}$　(2) $\underbrace{x^3}_{x\times x\times x}-2x-3$

2 着目する文字以外は数と同じように扱って次数を考えます。

3 式を変形して、$y=ax+b$ の形になるものを探します。
ア $a=-1$、$b=1$ の場合なので1次関数です。
イ 2次関数です。
ウ 変形すると $y=\frac{1}{x}$ となるので、1次関数ではありません。
エ 変形すると $y=-x-5$ となるので、1次関数です。
オ $a=-\frac{1}{2}$、$b=0$ の場合なので、1次関数です。
カ $y=ax+b$ の形ではないので、1次関数ではありません。

4 (1) 円周の長さ＝直径×円周率
＝2×半径×円周率

5 (3) $y=2\times0+4=4$

6 (2) $x=-4$のとき、$y=-\frac{1}{2}\times(-4)+1=3$

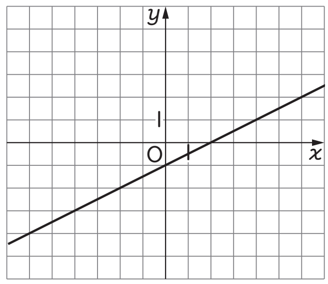
2 P.6-7 1次関数のグラフをかこう！

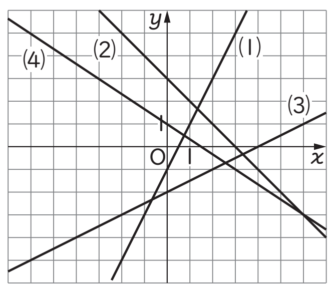
1 (1) ア 1　イ $-\frac{1}{2}$　ウ -3　エ $\frac{1}{3}$
(2) ア、エ

2 (1) 傾き 2、切片 1
(2) 傾き -3、切片 4
(3) 傾き $\frac{1}{4}$、切片 -2
(4) 傾き -1、切片 0

3 (1)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

(2)


4


解き方

1 (2) $y=ax+b$ の式で、$a>0$ のとき、xの値が増加するとyの値も増加します。

2 (2) $y=\underbrace{-3}_{傾き}x+\underbrace{4}_{切片}$

3 (2) (1)で作成した表をもとに、2点をとればグラフはかけます。できるだけ離れた2点をとると、より正確なグラフがかけます。

4 まず、切片を読み取ってy軸上に点をとります。次に、(1)の場合、xの値が1増えるごとにyの値は2ずつ増えます。(4)の場合、xの値が3増えるごとにyの値は2ずつ減ります。このようにして、グラフが通るもう1点を見つけます。

3 P.8-9 定義域、値域って何？

1 (1) -4　(2) -1　(3) 1　(4) $3a-4$

2 (1) $y=2x+12$　(2) $0<x<6$

(3) $12<y<24$

3 (1) ① $y \leqq 16$　② $-2<y<10$

(2) ① $y \leqq 2$　② $2 \leqq y \leqq 4$

4 (1) $x \geqq 1$　(2) $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$

5 (1) $a=-3$　(2) $b=1$

解き方

1 (4) $f(a-1)=3(a-1)-1=3a-4$

2 (1) 台形の面積＝(上底＋下底)×高さ÷2 より、$y=(x+6)\times4\div2=2(x+6)=2x+12$

(3) (1)で求めた式に、$x=0$ を代入すると $y=12$、$x=6$ を代入すると $y=24$ だから、$12<y<24$

3 (1) ① $x=5$ のとき $y=16$ で、$x \leqq 5$ の範囲で、x の値が小さくなると y の値も小さくなるので、$y \leqq 16$

② $x=-1$ のとき $y=-2$、$x=3$ のとき $y=10$ で、$-1<x<3$ の範囲で、x の値が大きくなると y の値も大きくなるので、$-2<y<10$

(2) ① $x=2$ のとき $y=2$ で、$x \geqq 2$ の範囲で x の値が大きくなると y の値は小さくなるので、$y \leqq 2$

② $x=0$ のとき $y=4$、$x=2$ のとき $y=2$ で、$0 \leqq x \leqq 2$ で、x の値が大きくなると y の値は小さくなるので、$2 \leqq y \leqq 4$

4 (1) $y=-1$ のとき $-1=4x-5$ より、$x=1$　$y \geqq -1$ の範囲で y の値が大きくなると x の値も大きくなるので、$x \geqq 1$

(2) $y=-3$ のとき $x=\frac{1}{2}$、$y=3$ のとき $x=2$　$-3 \leqq y \leqq 3$ の範囲で y の値が大きくなると x の値も大きくなるので、$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$

5 (1) 傾きが 4 で正の数なので、グラフは右上がりの直線となり、$x=2$ のとき $y=5$ となります。$5=4\times2+a$ より、$a=-3$

(2) (1)と同様に考えると、$x=b$ のとき $y=1$ となります。$1=4\times b-3$ より、$b=1$

4 P.10-11 1次関数の最大値・最小値を求めよう！

1 (1) $x=2$、最大値 4、$x=1$、最小値 1

(2) $x=-3$、最大値 2、$x=1$、最小値 -6

(3) $x=-1$、最大値 $\frac{4}{3}$、$x=3$、最小値 0

2 (1) ウ、エ　(2) ア、イ、オ、カ

3 (1) 最大値 ない、最小値 -3

(2) 最大値 -3、最小値 ない

4 (1) ① $a=2$　② 1

(2) ① $a=-4$　② -5

解き方

1 (1) 傾きが3で正の数なので、$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $x=2$ のとき最大値 $y=4$、$x=1$ のとき最小値 1 となります。

(2) 傾きが -2 で負の数なので、$-3 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $x=-3$ のとき最大値 $y=2$、$x=1$ のとき最小値 -6 となります。

2 $x \geqq 0$ の範囲で最大値が存在するのは傾きが負の数のとき、最小値が存在するのは傾きが正の数のときです。

3 (1) 傾きが -1 で負の数なので、$x=5$ のときの値が最小値です。最大値はありません。

(2) 傾きが $\frac{1}{4}$ で正の数なので、$-4<x \leqq 8$ の範囲では $x=8$ のときの値が最大値です。また、$x=-4$ は含まないので、最小値はありません。

4 (1) ① $a>0$ なので、グラフは右上がりの直線となり、$x=2$ のとき $y=7$ となります。したがって、$7=a\times2+3$ より、$a=2$

② ①と同様に考えると、$x=-1$ のときの y の値が最小値になります。
つまり、$y=2\times(-1)+3=1$

(2) ① $a<0$ なので、グラフは右下がりの直線となり、$x=-1$ のとき $y=7$ となります。したがって、$7=a\times(-1)+3$ より、$a=-4$

② ①と同様に考えると、$x=2$ のときの y の値が最小値になります。
つまり、$y=-4\times2+3=-5$

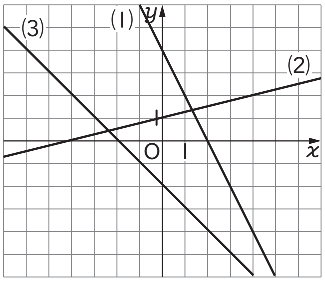
0001-0047_1_大人の数学_2次関数と微分積分編_KK.indb　3　2023/10/06　18:45:31

5 P.12-13 確認問題①

1 (1) 3次式　(2) 3次式

2 $y=80x+200$

3



4 (1) $y=-0.5x+12$

(2) $0 \leqq x \leqq 24$　(3) $0 \leqq y \leqq 12$

5 (1) 最大値 ない、最小値 -5

(2) 最大値 7、最小値 ない

6 $a=-3$、$b=-1$

解き方

2 分速80mでx分間歩くと$80x$m進みます。進んだ道のりに家から公園までの道のりを加えたものが、家からの道のりになります。

3 まず、切片を読み取ってy軸上に点をとります。(1)の場合、xの値が1増えるごとにyの値は2ずつ減ります。(2)の場合、xの値が4増えるごとにyの値は1ずつ増えます。このようにして、グラフが通るもう1点を見つけます。

4 (1) ろうそくは1分間に0.5cmずつ短くなり、x分後には$0.5x$cm短くなります。

(2) ろうそくの長さが最大となるのは$x=0$のとき、ろうそくの長さが最小となるのは$y=0$のときで、$0=-0.5x+12$、$x=24$だから、$0 \leqq x \leqq 24$

5 (1) 傾きが-2で負の数なので、$1<x \leqq 3$の範囲では$x=3$のときのyの値が最小値です。また、$x=1$は含まないので、最大値はありません。

6 傾きが-3で負の数なので、グラフは右下がりの直線となり、$x=-2$のとき$y=3$となります。$3=-3\times(-2)+a$より、$a=-3$
また、$x=b$のとき$y=0$となります。
$0=-3\times b-3$より、$b=-1$

6 P.14-15 2次関数って何？

1 イ、ウ、カ

2 (1) $y=x^2$　(2) $y=3\pi x^2$　(3) $y=2x^2+3x$

3 (1)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9

(2)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	1	3	1	-5	-15

(3)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	0	-2	-2	0	4

4 (1) 軸：$x=0$、頂点：(0、0)

(2) 軸：$x=1$、頂点：(1、2)

(3) 軸：$x=2$、頂点：(2、0)

解き方

1 式を変形して、$y=ax^2+bx+c$の形になるものを探します。

ア 1次式なので、2次関数ではありません。

イ $a=-3$、$b=0$、$c=0$の場合であるから、2次関数です。

ウ 変形すると$y=-2x^2-3$となるので、2次関数です。

2 (1) 正方形の面積は1辺の長さの2乗です。

(2) 半径がxの円の面積はπx^2なので、yはその3倍です。

(3) 長方形の面積は、縦×横なので、
$x(2x+3)=2x^2+3x$

3 (1) $x=-2$のとき、$y=(-2)^2=4$

(3) $x=-2$のとき、$y=(-2+1)\times(-2-2)$
$=(-1)\times(-4)=4$

4 (2) グラフがx軸と2点$(-2、0)$、$(4、0)$で交わるから、軸はそれらの中点の$(1、0)$を通ります。また、頂点のy座標は2です。

(3) グラフが2点$(0、2)$と$(4、2)$を通るから、軸はそれらの中点の$(2、2)$を通ります。
また、x軸と接しているから、頂点のy座標は0です。

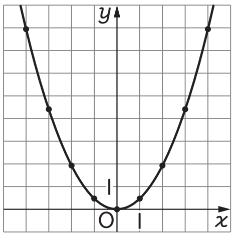
7 P.16-17 2次関数のグラフをかこう！

1 (1) イ、エ、オ　(2) ウ　(3) アとエ

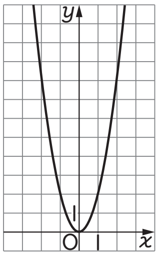
2 (1)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

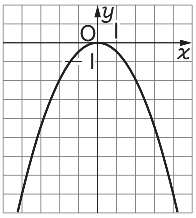
(2)



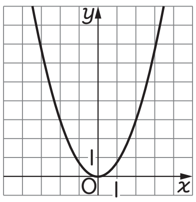
3 (1)



(2)



(3)



4 (1) 10　(2) -6

解き方

1 (1) $y=ax^2$ について、$a<0$ であるものが、上に凸の放物線になります。

(2) $y=ax^2$ について、a の絶対値が最も小さいものが、グラフの開き方が最も大きくなります。

(3) x 軸に関して対称なグラフになるものは、$y=ax^2$ と $y=-ax^2$ の関係であるような組です。

4 (1) $x=1$ のとき $y=2\times1^2=2$、$x=4$ のとき $y=2\times4^2=32$ なので、変化の割合は、

$$\frac{32-2}{4-1}=\frac{30}{3}=10$$

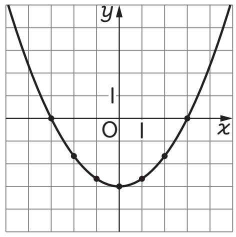
(2) $x=-2$ のとき $y=-3\times(-2)^2=-12$、$x=4$ のとき $y=-3\times4^2=-48$ なので、変化の割合は、$\dfrac{-48-(-12)}{4-(-2)}=\dfrac{-36}{6}=-6$

8 P.18-19 グラフを平行移動しよう！①

1 (1)

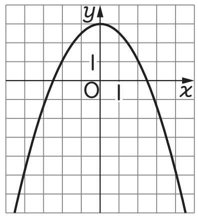
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{1}{3}x^2$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3
$\frac{1}{3}x^2-3$	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{8}{3}$	-3	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0

(2)



(3) -3

2 (1)

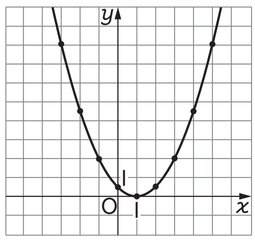


(2) 軸：$x=0$、頂点：$(0、3)$

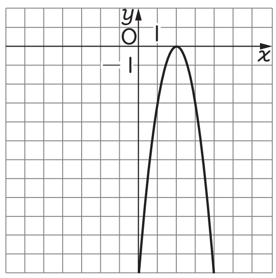
3 (1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$
$\frac{1}{2}(x-1)^2$	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

(2)



4 (1)

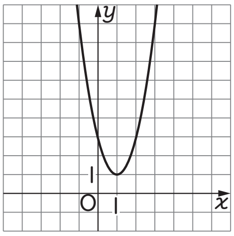


(2) 軸：$x=2$、頂点：$(2、0)$

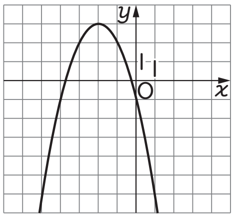
5 (1) $y=2(x+3)^2$　(2) $y=2x^2-1$

9 P.20-21 グラフを平行移動しよう！②

1 (1) ①



②



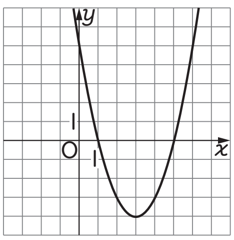
(2) ① 軸：$x=1$、頂点：(1、1)

② 軸：$x=-2$、頂点：$(-2$、$3)$

2 x 軸方向に 3、y 軸方向に 2

3 (1) $y=3(x-2)^2-7$　(2) $y=-(x-1)^2+4$

4 (1)



(2) 軸：$x=3$、頂点：$(3$、$-4)$

5 $y=3x^2+6x+4$

解き方

3 (1) $y=3x^2-12x+5=3(x^2-4x)+5$

$=3\{(x-2)^2-4\}+5=3(x-2)^2-12+5$

$=3(x-2)^2-7$

4 (1) $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$

より、$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 3、y 軸方向に -4 だけ平行移動します。

5 $y=3x^2-6x+1=3(x-1)^2-2$

$y=3(x-1)^2-2$ のグラフを x 軸方向に -2、y 軸方向に 3 だけ平行移動したものだから、

$y=3(x+1)^2+1=3(x^2+2x+1)+1$

$=3x^2+6x+4$

10 P.22-23 2次関数の最大値・最小値を求めよう！①

1 (1) イ、ウ、オ

(2) ア、エ、カ

2 (1) 最大値 ない　最小値 -5

(2) 最大値 $\frac{2}{3}$　最小値 ない

3 (1) 最大値 ない　最小値 -2

(2) 最大値 15　最小値 ない

(3) 最大値 ない　最小値 $-\frac{1}{4}$

(4) 最大値 37　最小値 ない

4 (1) オ　(2) エ

5 $b=2$

解き方

1 (1) 最大値が存在するのは、$y=ax^2+bx+c$ の式において、$a<0$ のときです。

(2) 最小値が存在するのは、$y=ax^2+bx+c$ の式において、$a>0$ のときです。

2 (1) 最小値はグラフの頂点の y 座標 -5 です。

(2) 最大値はグラフの頂点の y 座標 $\frac{2}{3}$ です。

3 (1) $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$ より、$x=1$ で最小値は -2、最大値はありません。

(2) $y=-2x^2+8x+7=-2(x-2)^2+15$ より、$x=2$ で最大値は 15、最小値はありません。

(3) $y=x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ より、

$x=-\frac{3}{2}$ で最小値は $-\frac{1}{4}$、最大値はありません。

4 (1) 最小値が存在するのは、$y=ax^2+bx+c$ や、$y=a(x-p)^2+q$ の式において、$a>0$ のときです。$a>0$ となるのは、イ、エ、オ、カで、そのうちグラフの頂点の y 座標が最も大きいものを選びます。

(2) (1)で選んだイ、エ、オ、カのうち、グラフの頂点の x 座標が最も大きいものを選びます。

5 $y=3x^2-6x+b=3(x-1)^2+b-3$ で、最小値はグラフの頂点の y 座標となるから、$b-3=-1$ を解きます。

11 P.24-25 2次関数の最大値・最小値を求めよう！②

1 (1) 最大値 3　　最小値 −5
(2) 最大値 13　　最小値 −3
(3) 最大値 27　　最小値 −5
(4) 最大値 ない　　最小値 −5

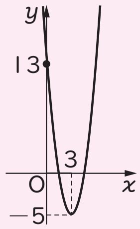
2 (1) 最大値 $\frac{7}{2}$　　最小値 −1
(2) 最大値 25　　最小値 1

3 (1) $a=4$　　(2) 20

4 (1) M＝9　　m＝1　　(2) M＝10　　m＝1

解き方

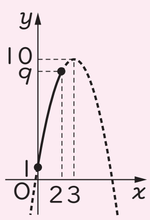
1 右の図のようなグラフを参考にして、定義域に注意して考えます。
(4)では $x=0$、$x=4$ がどちらも定義域に含まれないので最大値はありません。



2 (1) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$
$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{7}{2}$
より、$-1\leqq x\leqq 2$ では、$x=-1$ で最大値 $\frac{7}{2}$、$x=2$ で最小値 −1 をとります。
(2) $y=3x^2-6x+1=3(x-1)^2-2$ より、$-2\leqq x\leqq 0$ では、$x=-2$ のとき $y=25$、$x=0$ のとき $y=1$ より、$x=-2$ のときの y の値の方が大きいので、$x=-2$ で最大値25、$x=0$ で最小値 1 をとります。

3 (1) $y=2x^2-4x+a=2(x-1)^2+a-2$
グラフの頂点$(1, a-2)$は定義域に含まれるので、$x=1$ のとき最小値をとります。
よって、$a-2=2$ となります。

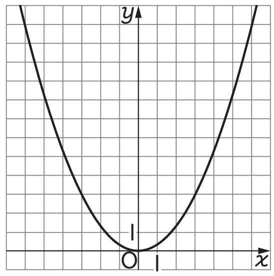
4 $y=-x^2+6x+1$
$=-(x-3)^2+10$
(1) $a=2$ のとき、$0\leqq x\leqq 2$ なので、$x=0$ で最小値 1、$x=2$ で最大値 9 をとります。



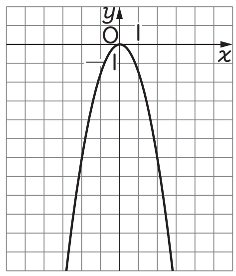
12 P.26-27 確認問題②

1 $y=\frac{1}{2}x^2$

2 (1)

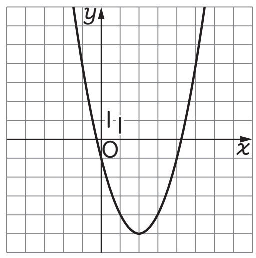


(2)



3 (1) $y=3(x+1)^2$　　(2) $y=3x^2+2$

4 (1)



(2)軸：$x=2$、頂点$(2, -5)$

5 最大値 8　　最小値 ない

6 (1) 最大値 3　　最小値 −15
(2) 最大値 2　　最小値 −7

解き方

4 (1) $y=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$ より、$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 2、y 軸方向に −5 だけ平行移動します。

5 $y=-3x^2+6x+5=-3(x-1)^2+8$ より、$x=1$ で最大値は 8、最小値はありません。

6 (1) $y=2x^2-12x+3=2(x-3)^2-15$ より、$x=0$ で最大値 3、$x=3$ で最小値 −15 をとります。
(2) $y=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$ より、$x=-1$ で最大値 2、$x=2$ で最小値 −7 をとります。

13 P.28-29 2次関数の式を求めよう！

1 (1) $y=-2(x-2)^2-1$

(2) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$

2 $y=-(x-3)^2+8$

3 (1) $y=x^2-4x+3$　(2) $y=-x^2+3x+1$

(3) $y=2x^2+4x-5$

解き方

1 (2) グラフの頂点が点(2、-1)であるこの2次関数は、$y=a(x-2)^2-1$とおけます。グラフが点(0、1)を通るとき、

$1=a\times(0-2)^2-1$ より、$a=\frac{1}{2}$

2 グラフの軸が直線 $x=3$ なので、この2次関数は $y=a(x-3)^2+q$ とおけます。これに与えられた点(0、-1)、(4、7)の座標を代入すると、

$-1=9a+q$、$7=a+q$

これを解いて、$a=-1$、$q=8$

3 $y=ax^2+bx+c$ とおいて、3点の座標を代入します。

(1) $c=3$、$a+b+c=0$、$9a+3b+c=0$

これらを解いて、$a=1$、$b=-4$、$c=3$

(2) $c=1$、$a+b+c=3$、$a-b+c=-3$

これらを解いて、$a=-1$、$b=3$、$c=1$

(3) $a-b+c=-7$ …①、$a+b+c=1$ …②、

$4a+2b+c=11$ …③

②−①より、$2b=8$、$b=4$ …④

④を①(または②)、③に代入して整理すると、

$$\begin{cases} a+c=-3 \\ 4a+c=3 \end{cases}$$

これを解いて、$a=2$、$c=-5$

14 P.30-31 2次方程式を解いてみよう！①

1 (1) $x=\pm2$　(2) $x=3\pm\sqrt{5}$

2 (1) $x=-4\pm\sqrt{13}$　(2) $x=-1$、7

(3) $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$　(4) $x=-\frac{1}{2}$、$-\frac{5}{2}$

3 (1) $x=-2$、2　(2) $x=-3$、2

(3) $x=-2$、$\frac{1}{3}$　(4) $x=-\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$

解き方

2 (1) $(x+4)^2-4^2+3=0$

$(x+4)^2=13$ より、$x=-4\pm\sqrt{13}$

(3) 両辺を3で割って、$x^2-2x+\frac{2}{3}=0$

$(x-1)^2-1^2+\frac{2}{3}=0$

$(x-1)^2=\frac{1}{3}$ より、$x-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

よって、$x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

(4) 両辺を4で割って、$x^2+3x+\frac{5}{4}=0$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}=0$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1$、$x+\frac{3}{2}=\pm1$

よって、$x=-\frac{3}{2}\pm1$ より、$x=-\frac{1}{2}$、$-\frac{5}{2}$

3 (1) $(x+2)(x-2)=0$

$x+2=0$ または $x-2=0$ より、$x=-2$、2

(2) $(x+3)(x-2)=0$

$x+3=0$ または $x-2=0$ より、$x=-3$、2

(3) 右のたすき掛けにより、

$(x+2)(3x-1)=0$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \rightarrow & 6 \\ 3 & & -1 & \rightarrow & -1 \\ \hline 3 & & -2 & & 5 \end{array}$$

よって、$x=-2$、$\frac{1}{3}$

(4) 右のたすき掛けにより、

$(2x+1)(4x-3)=0$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 1 & \rightarrow & 4 \\ 4 & & -3 & \rightarrow & -6 \\ \hline 8 & & -3 & & -2 \end{array}$$

$2x+1=0$ または

$4x-3=0$　より、

$x=-\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$

15 P.32 - 33 2次方程式を解いてみよう！②

1 ア…$\frac{b}{a}$、イ…$\frac{c}{a}$、ウ…$\frac{b}{2a}$、エ…$\frac{b^2}{4a^2}$、オ…b^2-4ac、カ…$2a$

2 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$　(2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

(3) $x=-2\pm\sqrt{6}$　(4) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$

(5) $x=\frac{3}{2}$、$-\frac{5}{2}$　(6) $x=\frac{3}{2}$、$\frac{1}{6}$

(7) $x=\frac{2}{5}$、$-\frac{5}{2}$

解き方

2 (1) $ax^2+bx+c=0$ において、$a=1$、$b=3$、$c=1$ の場合だから、

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

(2) $$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

(3) $$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{6}}{2}=-2\pm\sqrt{6}$$

(4) まず、両辺に4を掛けて、係数が整数の方程式に直します。$4x^2-6x+1=0$
$ax^2+bx+c=0$ において、$a=4$、$b=-6$、$c=1$ の場合だから、

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times4\times1}}{2\times4}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{6\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$$

(5) $$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times4\times(-15)}}{2\times4}=\frac{-4\pm\sqrt{256}}{8}=\frac{-4\pm16}{8}=\frac{-1\pm4}{2}$$

(6) $$x=\frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-4\times12\times3}}{2\times12}=\frac{20\pm\sqrt{256}}{24}=\frac{20\pm16}{24}=\frac{5\pm4}{6}$$

(7) $$x=\frac{-21\pm\sqrt{21^2-4\times10\times(-10)}}{2\times10}=\frac{-21\pm\sqrt{841}}{20}=\frac{-21\pm29}{20}$$

16 P.34 - 35 1次不等式を解いてみよう！

1 (1) $x>8$　(2) $x>2$　(3) $x\geqq-\frac{5}{2}$

(4) $x>4$　(5) $x\geqq0$　(6) $x\leqq\frac{10}{3}$

(7) $x>7$

2 $a>\frac{1}{2}$

3 $x=3$

4 3個

解き方

1 (2) 両辺を3で割ります。または、両辺に$\frac{1}{3}$を掛けます。

(3) 両辺を -2 で割ります。または、両辺に$-\frac{1}{2}$を掛けます。このとき、不等号の向きが逆になることに注意しましょう。

(4) $7x-5x>6+2$、$2x>8$、$x>4$

(5) 両辺をそれぞれ展開して整理します。
$3x+3-2\geqq2x-2+3$、$x\geqq0$

(6) まず、両辺に分母の 2、3、4 の最小公倍数12をかけて、係数が整数になるようにします。

$6x+8\leqq3x+18$、$3x\leqq10$、$x\leqq\frac{10}{3}$

(7) まず、両辺に10を掛けて、係数が整数になるようにします。
$25x-13>18x+36$、$7x>49$、$x>7$

2 不等式に $x=3$ を代入すると、$a\times4>2$ より、$a>\frac{1}{2}$

3 不等式 $2x-6+x<5$ を解くと、$x<\frac{11}{3}$

$\frac{11}{3}=3.66\cdots$ だから、これをみたす最大の整数xの値は3です。

4 不等式 $3x+5>7x-11$ を解くと、$x<4$
これをみたす自然数xの値は1、2、3の3個です。4は含まないことに注意しましょう。

17 P.36-37 連立不等式を解いてみよう！①

1 (1) $x \leqq 3$　(2) $5 < x < 11$

2 (1) $\frac{3}{2} < x < 3$　(2) $1 \leqq x < \frac{15}{4}$

3 2、3、4、5、6、7

4 $a \leqq 1$

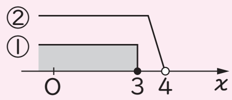
解き方

1 (1) $\begin{cases} 3x-5 \leqq x+1 \cdots ① \\ 2x+3 > 4x-5 \cdots ② \end{cases}$

①より、$x \leqq 3$

②より、$x < 4$

よって、$x \leqq 3$



(2) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} > \frac{x-3}{2} \cdots ① \\ 4(x-2) > 3(x-1) \cdots ② \end{cases}$

①の両辺に3と2の最小公倍数6を掛けて、

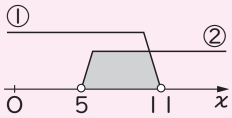
$2(x+1) > 3(x-3)$ より、$2x+2 > 3x-9$

$x < 11$

②より、$4x-8 > 3x-3$

から、$x > 5$

よって、$5 < x < 11$

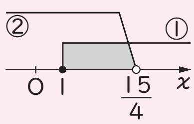


2 (2) $\begin{cases} 2(x+1) \leqq 3x+1 \cdots ① \\ 3x+1 < 16-x \cdots ② \end{cases}$

①より、$2x+2 \leqq 3x+1$ から、$x \geqq 1$

②より、$x < \frac{15}{4}$

よって、$1 \leqq x < \frac{15}{4}$



3 $2x-1 \geqq 2$ より、$x \geqq \frac{3}{2}$

$3(x+5) \geqq 6x-7$ より、$3x+15 \geqq 6x-7$

$x \leqq \frac{22}{3}$　よって、$\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{22}{3}$

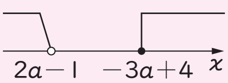
これをみたす整数xは、2、3、4、5、6、7の6個です。$\frac{3}{2}=1.5$、$\frac{22}{3}=7.33\cdots$ に注意しましょう。

4 $\begin{cases} x+1 < 2a \cdots ① \\ x+3a \geqq 4 \cdots ② \end{cases}$　①より、$x < 2a-1$　②より、$x \geqq -3a+4$

よって、$-3a+4 \leqq x < 2a-1$ をみたすxが存在しないのは、

$-3a+4 \geqq 2a-1$、

つまり、$a \leqq 1$ のときです。



18 P.38-39 1次不等式を利用して身近な問題を解いてみよう！

1 (1) $3x+5 > 100$

(2) $1000-100x \geqq 300$

2 5個

3 39人

4 1.2km以下

5 3.2kg以上

解き方

1 (2) (払った金額)−(代金)=(おつり)に数や文字をあてはめて、不等式をつくります。

2 りんごをx個買うとすれば、かきは$(15-x)$個買うことになります。問題の条件から不等式をつくると、$120x+100(15-x) \leqq 1600$

これを解くと、$x \leqq 5$ より、りんごが買える最大の個数は5個です。

3 生徒の人数をx人とすれば、ノートを1人5冊ずつ分けると、ノートが何冊か余るので、$5x < 200$より、$x < 40$

ノートを1人6冊ずつ分けると、30冊以上足りなくなるので、$6x-200 \geqq 30$

$6x \geqq 230$ より、$x \geqq \frac{230}{6} = 38.3\cdots$

よって、$38.3\cdots \leqq x < 40$

これをみたす整数xは39しかありません。

4 分速60mで歩く道のりをxmとすれば、4.2kmは4200mなので、分速150mで走る道のりは$(4200-x)$mとなります。分速60mで歩く時間は（道のり）÷（速さ）の式にあてはめると、$\frac{x}{60}$分、分速150mで走る時間は、$\frac{4200-x}{150}$分で、歩く時間と走る時間の合計が40分以内となることから、不等式をつくると、$\frac{x}{60} + \frac{4200-x}{150} \leqq 40$

これを解くと、$x \leqq 1200$ となります。

5 AからBへ米を$x$kg移すとすると、Aの重さは$(36-x)$kg、Bの重さは$(5+x)$kgになります。条件から不等式をつくると、

$36-x \leqq 4(5+x)$

これを解くと、$x \geqq \frac{16}{5} = 3.2$

19 P.40-41 確認問題③

1 (1) $y=-2(x-1)^2+3$

(2) $y=3x^2-2x-1$

2 (1) $x=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{2}$　(2) $x=\dfrac{3}{2}$、$-\dfrac{5}{2}$

(3) $x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

3 $a<\dfrac{1}{3}$

4 (1) $-\dfrac{10}{3}<x\leqq 3$　(2) $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{9}{2}$

5 16個以上

解き方

1 (2) $y=ax^2+bx+c$ とおいて、3点の座標を代入します。

$a-b+c=4$、$c=-1$、$4a+2b+c=7$

これらを解いて、$a=3$、$b=-2$、$c=-1$

2 (3) $x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{28}}{6}=\dfrac{4\pm2\sqrt{7}}{6}=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

3 不等式に $x=-2$ を代入すると、

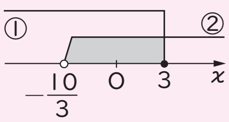
$-6a+5>3a+2$ より、$a<\dfrac{1}{3}$

4 (1) $\begin{cases} 3(x+1)-2\leqq 2(x+2) \cdots ① \\ x>\dfrac{x-10}{4} \cdots ② \end{cases}$

①より、$3x+3-2\leqq 2x+4$ から、$x\leqq 3$

②より、$4x>x-10$から、

$x>-\dfrac{10}{3}$



よって、$-\dfrac{10}{3}<x\leqq 3$

5 商品をx個買うとします。

A商店で買うときの代金は$500x$円です。

B商店で買うとき、定価より1割高い価格は$500\times1.1=550$(円)、定価の2割を引いた価格は $500\times(1-0.2)=400$(円) です。

よって、$x\leqq 10$ のときはB商店の方が合計金額が高くなるので、$x>10$ です。このとき、問題の条件から不等式をつくると、

$500x>550\times10+400(x-10)$

これを解くと、$x>15$ となるから、16個以上買うときです。

20 P.42-43 実数解、重解って何？

1 (1) 2個　(2) 2個　(3) 1個

(4) 2個　(5) 0個　(6) 1個

2 (1) $a=\dfrac{9}{8}$　(2) $a=6$、-6

3 $a<3$

4 $a<-\dfrac{9}{4}$

解き方

1 問題の2次方程式の判別式をDとします。

(1) $D=5^2-4\cdot2\cdot1=25-8=17>0$

したがって、実数解の個数は、2個

(2) $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4>0$

したがって、実数解の個数は、2個

(3) $D=(-60)^2-4\cdot25\cdot36=3600-3600=0$

したがって、実数解の個数は、1個

または、因数分解を用いて、$(5x-6)^2=0$ から、

実数解は $x=\dfrac{6}{5}$ の1個と求めてもよいです。

(4) $D=5^2-4\cdot2\cdot(-1)=25+8=33>0$

したがって、実数解の個数は、2個

(5) $D=(\sqrt{2})^2-4\cdot3\cdot1=2-12=-10<0$

したがって、実数解の個数は、0個

(6) $D=(-2\sqrt{7})^2-4\cdot7\cdot1=28-28=0$

したがって、実数解の個数は、1個

2 問題の2次方程式の判別式をDとします。

(1) $D=3^2-4\cdot2\cdot a=9-8a$

重解をもつとき、$D=0$ であるから、

$9-8a=0$　　よって、$a=\dfrac{9}{8}$

(2) $D=(-a)^2-4\cdot1\cdot9=a^2-36$

重解をもつとき、$D=0$ であるから、

$a^2-36=0$　　よって、$a=6$、-6

3 問題の2次方程式の判別式をDとします。

$D=4^2-4\cdot2\cdot(a-1)=24-8a$

2つの異なる実数解をもつとき、$D>0$ であるから、$24-8a>0$　　よって、$a<3$

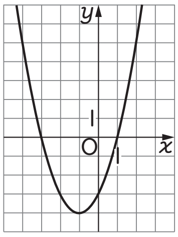
4 問題の2次方程式 $(a\neq0)$ の判別式をDとします。

$D=3^2-4\cdot a\cdot(-1)=9+4a$

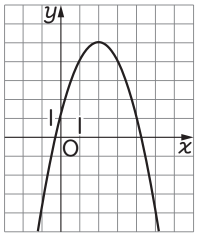
実数解をもたないとき、$D<0$ であるから、

$9+4a<0$　　よって、$a<-\dfrac{9}{4}$

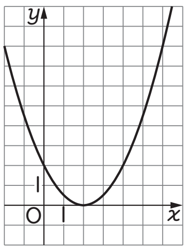
21 P.44-45 2次関数のグラフとx軸との位置関係を調べよう！①

1 (1) ① $(-1、-4)$
②


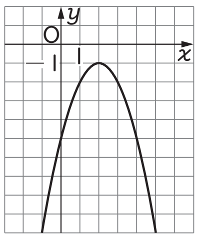
③ 2個

(2) ① $(2、5)$
②


③ 2個

(3) ① $(2、0)$
②


③ 1個

(4) ① $(2、-1)$
②


③ 0個

2 (1) $(-1、0)$、$(3、0)$　(2) $\left(\dfrac{1}{2}、0\right)$

(3) $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}、0\right)$、$\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}、0\right)$

(4) $(-\sqrt{3}、0)$

解き方

1 (2) ① $y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$ より、
頂点の座標は、$(2、5)$

(3) ① $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+2=\dfrac{1}{2}(x^2-4x+4)$

$=\dfrac{1}{2}(x-2)^2$ より、頂点の座標は、$(2、0)$

(4) ① $y=-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$ より、
頂点の座標は、$(2、-1)$

2 (1) $x^2-2x-3=0$ より、$(x+1)(x-3)=0$
よって、$x=-1、3$

(2) $-4x^2+4x-1=0$ より、$4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0$　よって、$x=\dfrac{1}{2}$

(3) $x^2-3x+1=0$ を解の公式を用いて解くと、

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

22 P.46-47 2次関数のグラフとx軸との位置関係を調べよう！②

1 (1) 2個　(2) 0個　(3) 1個
(4) 2個　(5) 0個

2 (1) $a>-\dfrac{1}{3}$　(2) $a<-\dfrac{1}{3}$

3 $a=2$

4 $a<0$、$0<a<\dfrac{1}{3}$

解き方

1 問題の2次関数の式で $y=0$ とおいた2次方程式の判別式をDとします。

(1) $D=4^2-4\cdot3\cdot1=16-12=4>0$
したがって、x軸との共有点の個数は、2個

(2) $D=3^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)=9-16=-7<0$
したがって、x軸との共有点の個数は、0個

(3) $D=2^2-4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot3=4-4=0$
したがって、x軸との共有点の個数は、1個

2 問題の2次関数の式で $y=0$ とおいた2次方程式の判別式をDとすると、
$D=4^2-4\cdot3\cdot(-a+1)=4+12a$

(1) グラフがx軸と共有点を2個もつとき、
$D>0$ であるから、$4+12a>0$

よって、$a>-\dfrac{1}{3}$

(2) グラフとx軸との共有点が存在しないとき、$D<0$ であるから、$4+12a<0$

よって、$a<-\dfrac{1}{3}$

3 問題の2次関数の式で $y=0$ とおいた2次方程式 $(a\neq0)$ の判別式をDとすると、
$D=4^2-4\cdot a\cdot2=16-8a$
グラフがx軸と接するとき、$D=0$ であるから、
$16-8a=0$　よって、$a=2$

4 問題の2次関数の式で $y=0$ とおいた2次方程式 $(a\neq0)$ の判別式をDとすると、
$D=\{-2(a-1)\}^2-4\cdot a\cdot(a+1)=4-12a$
グラフがx軸と共有点を2個もつとき、

$D>0$ であるから、$4-12a>0$、$a<\dfrac{1}{3}$

また、$a\neq0$ なので、求めるaの値の範囲は、

$a<0$、$0<a<\dfrac{1}{3}$

23 P.48-49 1次関数と2次関数のグラフの位置関係を調べよう！

1 (1) $(1,\ 11)$、$(-6,\ -3)$

(2) $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$、$(2,\ 6)$

(3) $(3,\ -8)$

(4) $(2,\ 2)$、$(4,\ 8)$

2 $a=2$、10

3 (1) $k \geqq -12$　(2) $k=-12$

(3) $(3,\ -6)$

解き方

1 (1) 2式より、y を消去すると、

$x^2+7x+3=2x+9$

$x^2+5x-6=0$　$(x-1)(x+6)=0$

$x=1$、-6

$x=1$ のとき、$y=2\cdot1+9=11$

$x=-6$ のとき、$y=2\cdot(-6)+9=-3$

(3) 2式より、y を消去すると、

$-x^2+2x-5=-4(x-1)$

$x^2-6x+9=0$　$(x-3)^2=0$　$x=3$

$x=3$ のとき、$y=-4(3-1)=-8$

2 2式より、y を消去すると、$-2x^2+6x-2=ax$

$2x^2+(a-6)x+2=0$

判別式をDとすると、

$D=(a-6)^2-4\cdot2\cdot2=a^2-12a+20$

2次関数のグラフが直線と接するとき、

$D=0$ より、

$a^2-12a+20=0$　$(a-2)(a-10)=0$

よって、$a=2$、10

3 2式より、y を消去すると、

$x^2-4x-3=2x+k$

$x^2-6x-k-3=0$ …①

2次方程式①の判別式をDとすると、

$D=(-6)^2-4(-k-3)=48+4k$

(1) 共有点が少なくとも1つあるとき、$D \geqq 0$ より、

$48+4k \geqq 0$　よって、$k \geqq -12$

(2) 接するとき、$D=0$ より、$48+4k=0$

よって、$k=-12$

(3) (2)のとき、$k=-12$ を①に代入すると、

$x^2-6x+9=0$　$(x-3)^2=0$　$x=3$

$x=3$ のとき、$y=2\cdot3-12=-6$

24 P.50-51 2次不等式を解いてみよう！①

1 (1) $-1<x<5$　(2) $x \leqq -\dfrac{5}{2}$、$3 \leqq x$

(3) $x<-5$、$2<x$　(4) $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}$

(5) $x \leqq \dfrac{5-\sqrt{37}}{6}$、$\dfrac{5+\sqrt{37}}{6} \leqq x$

(6) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

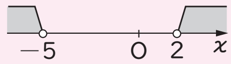
2 (1) $a=-2$　(2) $b=-15$

3 (1) $a=1$　(2) $b=2$

解き方

1 (3) $x^2+3x-10>0$ より、

$(x+5)(x-2)>0$



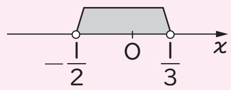
よって、$x<-5$、$2<x$

(4) $6x^2+x-1=0$ を解の公式で解くと、

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times6\times(-1)}}{2\times6}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{-1\pm5}{12}\qquad x=\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}$$

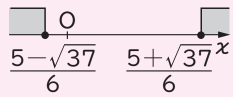
よって、$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}$



(5) $3x^2-5x-1=0$ を解の公式で解くと、

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{37}}{6}$$



よって、

$x \leqq \dfrac{5-\sqrt{37}}{6}$、$\dfrac{5+\sqrt{37}}{6} \leqq x$

2 $x^2+ax+b<0$ …① の解が $-3<x<5$ のとき、$(x+3)(x-5)<0$ と表されます。左辺を展開すると、$x^2-2x-15<0$ …②

①と②の式を比べて、$a=-2$、$b=-15$

3 $x^2-(2a+1)x+a+1<0$ …① の解が $1<x<b$ のとき、

$(x-1)(x-b)<0$ と表されます。左辺を展開すると、$x^2-(1+b)x+b<0$ …②

①と②の式を比べて、$2a+1=1+b$、

$a+1=b$

2式を a、b について解くと、$a=1$、$b=2$

25 P.52-53 2次不等式を解いてみよう！②

1 (1) $x=2$ を除くすべての実数

(2) 解はない　(3) $x=\frac{3}{2}$

(4) すべての実数　(5) すべての実数

(6) 解はない　(7) すべての実数

(8) すべての実数

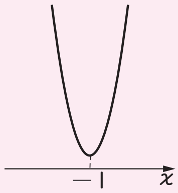
2 $a>4$

解き方

1 (2) 2次方程式 $x^2+2x+2=0$ の判別式をDとすると、

$D=2^2-4\cdot1\cdot2=-4<0$

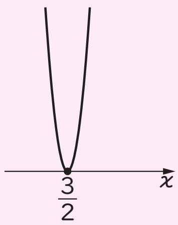
よって、$y=x^2+2x+2$ のグラフはx軸と共有点をもたないから、$y<0$ となるxはありません。



(3) $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

$y=4x^2-12x+9$ のグラフは右の図のようになり、$y\leqq0$ となるのは、

$x=\frac{3}{2}$



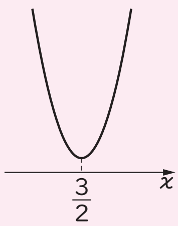
(4) $-x^2+3x-3<0$ より、

$x^2-3x+3>0$

$x^2-3x+3=0$ の判別式をDとすると、

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot3$

$=-3<0$



したがって、$y=x^2-3x+3$ のグラフはx軸と共有点をもたないから、$y>0$ となるxは、すべての実数となります。

2 $y=ax^2+4x+a-3$ のグラフがつねにx軸より上側にある条件を考えます。その条件は

① グラフが下に凸、すなわち、$a>0$

② グラフがx軸と共有点をもたない、すなわち、$ax^2+4x+a-3=0$ の判別式$D<0$

の両方が成り立つことです。

②より、$D=4^2-4a(a-3)<0$

$-4a^2+12a+16<0$　　$a^2-3a-4>0$

$(a+1)(a-4)>0$　　$a<-1$、$4<a$

①と合わせて、求めるaの値の範囲は、

$a>4$

26 P.54-55 連立不等式を解いてみよう！②

1 (1) $-\frac{1}{2}\leqq x<2$　(2) $3\leqq x\leqq5$

(3) $-2<x\leqq1$、$3\leqq x$

(4) $x\leqq-4$、$5\leqq x$

(5) $1-\sqrt{2}\leqq x<0$、$1<x\leqq<1+\sqrt{2}$

(6) $-1<x<1$

2 6個

3 $a<\frac{5}{3}$

解き方

1 (4) $\begin{cases} x^2+2x-3>0 \cdots① \\ x^2-x-20\geqq0 \cdots② \end{cases}$

①より、$(x+3)(x-1)>0$

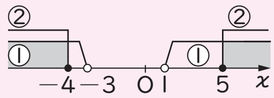
$x<-3$、$1<x$

②より、$(x+4)(x-5)\geqq0$

$x\leqq-4$、$5\leqq x$

したがって、求める解は、

$x\leqq-4$、$5\leqq x$



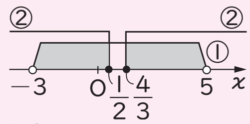
2 $\begin{cases} x^2-2x-15<0 \cdots① \\ 6x^2-11x+4\geqq0 \cdots② \end{cases}$

①より、$(x+3)(x-5)<0$　　$-3<x<5$

②より、$(2x-1)(3x-4)\geqq0$　　$x\leqq\frac{1}{2}$、$\frac{4}{3}\leqq x$

連立不等式の解は、

$-3<x\leqq\frac{1}{2}$、$\frac{4}{3}\leqq x<5$



解に含まれる整数xの個数は、-2、-1、0、2、3、4の6個です。

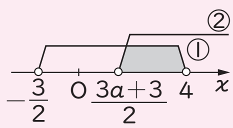
3 $2x^2-5x-12<0 \cdots①$より、

$(2x+3)(x-4)<0$

よって、$-\frac{3}{2}<x<4$

$2(x-a)>a+3 \cdots②$ より、$x>\frac{3a+3}{2}$

①、②を同時にみたすxが存在するための条件は、



$\frac{3a+3}{2}<4$、すなわち、$a<\frac{5}{3}$

0001-0047_1_大人の数学_2次関数と微分積分編_KK.indb 14　2023/10/06 18:45:36

27 P.56-57 2次不等式を利用して身近な問題を解いてみよう！

1 (1) $x(20-x) \geqq 75$　　(2) $x > 20 - x$
(3) $10 < x \leqq 15$

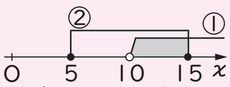
2 (1) $80 + 2x$ 個　　(2) $5 \leqq x \leqq 55$

3 $\dfrac{1}{2}$秒後から1秒後までの間

4 $1 < x \leqq 2$

解き方

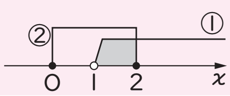
1 (1) 縦の長さと横の長さの和は
$40 \div 2 = 20$(cm)なので、縦が$x$cmならば、横は$(20-x)$cmです。
(2) 縦の長さが横の長さよりも長いので、
$x > 20 - x$
(3) (2)の不等式を解くと、$x > 10$ …①
また、(1)の不等式を解くと、
$x(20-x) \geqq 75$　　$x^2 - 20x + 75 \leqq 0$
$(x-5)(x-15) \leqq 0$　　$5 \leqq x \leqq 15$ …②
①、②の共通部分を求めて、$10 < x \leqq 15$



2 (1) 1個の値段をx円値下げすると、売上個数は$2x$個増えるので、1日の売上個数は、$(80+2x)$個
(2) 不等式をつくると、
$(100-x)(80+2x) \geqq 8550$
$2x^2 - 120x + 550 \leqq 0$
$x^2 - 60x + 275 \leqq 0$
$(x-5)(x-55) \leqq 0$　　$5 \leqq x \leqq 55$

3 不等式をつくると、$15x - 10x^2 \geqq 5$
$10x^2 - 15x + 5 \leqq 0$　　$2x^2 - 3x + 1 \leqq 0$
$(2x-1)(x-1) \leqq 0$　　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$

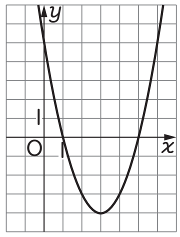
4 作った直方体の縦、横、高さはそれぞれ$x$cm、$(x+2)$cm、$(x-1)$cmで、高さは正の数でなければならないから、$x-1>0$より、$x>1$ …①
不等式をつくると、$x(x+2)(x-1) \leqq x^3$
$x^3 + x^2 - 2x \leqq x^3$　　$x^2 - 2x \leqq 0$　$x(x-2) \leqq 0$
$0 \leqq x \leqq 2$ …②
①、②の共通部分を求めて、$1 < x \leqq 2$



28 P.58-59 確認問題④

1 $a = 2$、-2

2 (1) $(3,\ -4)$　　(2)
(3) 2個



3 $a > -\dfrac{3}{2}$

4 $a = -4$、12

5 (1) $2 \leqq x \leqq 3$　(2) すべての実数

6 $x < -5$、$\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$、$2 \leqq x$

7 10m以上

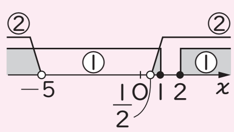
解き方

1 問題の2次方程式の判別式をDとします。
$D = (2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4a^2 - 16$
重解をもつとき、D=0であるから、
$4a^2 - 16 = 0$　　よって、$a = 2$、-2

3 問題の2次関数の式で$y=0$とおいた2次方程式の判別式をDとすると、
$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a+1) = 12 + 8a$
グラフがx軸と共有点を2個もつとき、$D>0$であるから、$12 + 8a > 0$　　よって、$a > -\dfrac{3}{2}$

4 2式より、yを消去すると、$2x^2 + 4x + 3 = ax - 5$
$2x^2 + (4-a)x + 8 = 0$　判別式をDとすると、
$D = (4-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = a^2 - 8a - 48$
①と②が接するとき、D=0より、
$a^2 - 8a - 48 = 0$
$(a+4)(a-12) = 0$より、$a = -4$、12

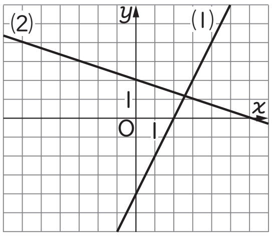
6 $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqq 0 \cdots ① \\ 2x^2 + 9x - 5 > 0 \cdots ② \end{cases}$
①より、$(x-1)(x-2) \geqq 0$　　$x \leqq 1$、$2 \leqq x$
②より、$(x+5)(2x-1) > 0$　　$x < -5$、$\dfrac{1}{2} < x$
連立不等式の解は、
$x < -5$、$\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$、
$2 \leqq x$



7 長方形の横の長さをxmとすると、縦の長さは$(x-4)$mで$x-4>0$より、$x>4$ …①
不等式をつくると、$x(x-4) \geqq 60$
$(x+6)(x-10) \geqq 0$　　$x \leqq -6$、$10 \leqq x$ …②
①、②の共通部分を求めて、$x \geqq 10$

29 P.60-61 1次関数と2次関数のまとめ①

1



2 (1) 最大値 15、最小値 -3
(2) 最大値 5、最小値 -11

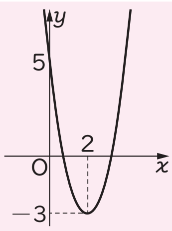
3 (1) $x=3\pm\sqrt{6}$　(2) $x=2$、$-\dfrac{1}{3}$

4 (1) $-3<x\leqq\dfrac{2}{3}$　(2) $1<x\leqq6$

5 (1) $20\leqq x^2+(-x+6)^2\leqq26$
(2) $1\leqq x\leqq2$、$4\leqq x\leqq5$

解き方

2 (1) 右の図のようなグラフを参考にして、定義域に注意して、最大値、最小値を考えます。



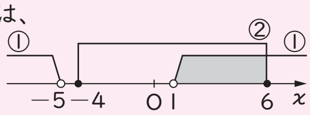
3 (1) 解の公式より、

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times3}}{2\times1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{6}}{2}=3\pm\sqrt{6}$$

4 (2) $\begin{cases} x^2+4x-5>0 \cdots① \\ x^2-2x-24\leqq0 \cdots② \end{cases}$

①より、$(x-1)(x+5)>0$　$x<-5$、$1<x$
②より、$(x+4)(x-6)\leqq0$　$-4\leqq x\leqq6$
連立不等式の解は、
$1<x\leqq6$



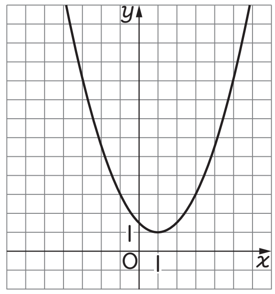
5 (1) 2つの正方形の1辺の長さの関係について、
$4x+4y=24 \cdots①$
2つの正方形の面積の和についての不等式は、$20\leqq x^2+y^2\leqq26 \cdots②$
①より、$y=-x+6$　これを②に代入して、
$20\leqq x^2+(-x+6)^2\leqq26$

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2-6x+8\geqq0 \\ x^2-6x+5\leqq0 \end{cases}$ を解いて求めます。

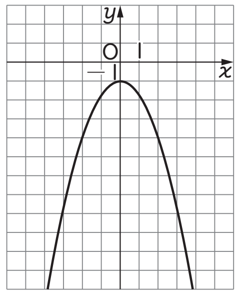
30 P.62-63 1次関数と2次関数のまとめ②

1 (1) 最大値 5、最小値 -1
(2) 最大値 ない、最小値 0

2 (1)



(2)



3 (1) $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x$　(2) $y=-x^2+3x+5$

4 (1) 2個　(2) 0個　(3) 1個

5 15個まで

解き方

3 (2) $y=ax^2+bx+c$ とおいて、3点の座標を代入します。
$a-b+c=1$、$16a+4b+c=1$、$a+b+c=7$
これらを解いて、$a=-1$、$b=3$、$c=5$

4 問題の2次関数の式で $y=0$ とおいた2次方程式の判別式をDとします。
(1) $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-1)=9+4=13>0$
したがって、x軸との共有点の個数は、2個
(2) $D=3^2-4\cdot2\cdot2=9-16=-7<0$
したがって、x軸との共有点の個数は、0個
(3) $D=(-12)^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$
したがって、x軸との共有点の個数は、1個

5 ももをx個買うとすれば、なしは$(16-x)$個買うことになります。問題の条件から不等式をつくると、$180(16-x)+240x<3800$
これを解くと、$x<\dfrac{46}{3}=15.3\cdots$ より、ももが買える最大の個数は15個です。

31 P.66-67 平均変化率、極限値って何？

1 (1) 3　(2) 2

(3) 0　(4) $\frac{1}{3}$

2 (1) 9　(2) 5

(3) $\frac{3}{2}$　(4) 4

(5) -2　(6) -3

解き方

1 (1) $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(3\cdot3+1)-(3\cdot1+1)}{3-1}=3$

(2) $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{3^2-(-1)^2}{3-(-1)}=2$

(3) $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}$

$=\frac{(3^2-3\cdot3+1)-(0^2-3\cdot0+1)}{3-0}=0$

(4) $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{\frac{1}{3}\cdot2-\frac{1}{3}\cdot1}{2-1}=\frac{1}{3}$

2 (1) $\lim_{x\to3}x^2=3^2=9$

(2) $\lim_{x\to0}(3x^2-4x+5)=3\cdot0^2-4\cdot0+5=5$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{x+3}{x+2}=\frac{0+3}{0+2}=\frac{3}{2}$

(4) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)=2+2=4$

$x\to2$ のとき、分母$\to0$ となるので、はじめに分母・分子を $x-2$ で約分してから、x に 2 を代入して求めます。

(5) $\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to0}(x-2)$

$=-2$

$x\to0$ のとき、分母$\to0$ となるので、はじめに分母・分子を x で約分してから、x に 0 を代入して求めます。

(6) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{x+1}}$

$=\lim_{x\to-1}(x-2)=-1-2=-3$

$x\to-1$ のとき、分母$\to0$ となるので、はじめに分母・分子を $x+1$ で約分してから、x に -1 を代入して求めます。

32 P.68-69 微分係数を求めよう！

1 (1) 3　(2) 3

(3) 3　(4) -1

2 (1) 5　(2) -2

(3) 5　(4) 3

解き方

1 (1) $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3x-3\cdot1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to1}3=3$

(2) $f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(-x^2+x)-\{-(-1)^2+(-1)\}}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+x+2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{-(x^2-x-2)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{-\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to-1}\{-(x-2)\}$

$=3$

(3) $f(x)=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$

$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x-2)-(1^2+1-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}}$

$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$

2 (1) $f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{5(1+h)-1\}-(5\cdot1-1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{5+5h-1-5+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{5\cancel{h}}{\cancel{h}}$

$=\lim_{h\to0}5=5$

(2) $f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{1-2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-2h+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(-2+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(-2+h)=-2$

33 P.70-71 導関数を求めよう！

1 (1) 2　(2) -3　(3) $6x$
(4) $-2x$　(5) $2x-1$　(6) $-2x+5$
(7) $2x-2$　(8) $3x^2-4x$

解き方

1 (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)-2x}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}2=2$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{-3(x+h)+5\}-(-3x+5)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-3\cancel{h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(-3)=-3$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2-3x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{6xh+3h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(6x+3h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x$

(5) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2-(x+h)\}-(x^2-x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2-h}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(2x+h-1)}{\cancel{h}}$

$=\lim_{h\to 0}(2x+h-1)=2x-1$

(6) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{-(x+h)^2+5(x+h)+1\}-(-x^2+5x+1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-2xh-h^2+5h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(-2x-h+5)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(-2x-h+5)$

$=-2x+5$

(7) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2-2(x+h)+8\}-(x^2-2x+8)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(2x+h-2)}{\cancel{h}}$

$=\lim_{h\to 0}(2x+h-2)=2x-2$

(8) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^3-2(x+h)^2\}-(x^3-2x^2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3-4xh-2h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2-4x-2h)}{\cancel{h}}$

$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-4x-2h)=3x^2-4x$

34 P.72-73 微分してみよう！

1 (1) $f'(x)=4x^3$　(2) $f'(x)=0$
2 (1) $y'=2$　(2) $y'=-8x$
(3) $y'=15x^2$　(4) $y'=-12x^3$
(5) $y'=3x^2+1$　(6) $y'=4x^3-3x^2-2x$
(7) $y'=6x-6$　(8) $y'=-6x^2-10x+7$

解き方

1 (1) $f'(x)=(x^4)'=4x^3$
(2) $f'(x)=(2)'=0$

2 (1) $y'=(2x)'=2(x)'=2\cdot 1=2$
(2) $y'=(-4x^2)'=-4(x^2)'=-4\cdot 2x=-8x$
(3) $y'=(5x^3)'=5(x^3)'=5\cdot 3x^2=15x^2$
(4) $y'=(-3x^4)'=-3(x^4)'=-3\cdot 4x^3=-12x^3$
(5) $y'=(x^3+x)'=(x^3)'+(x)'=3x^2+1$
(6) $y'=(x^4-x^3-x^2)'=(x^4)'-(x^3)'-(x^2)'$
$=4x^3-3x^2-2x$
(7) $y'=(3x^2-6x-4)'=(3x^2)'-(6x)'-(4)'$
$=3(x^2)'-6(x)'-(4)'$
$=3\cdot 2x-6\cdot 1-0$
$=6x-6$
(8) $y'=(-2x^3-5x^2+7x)'$
$=(-2x^3)'-(5x^2)'+(7x)'$
$=-2(x^3)'-5(x^2)'+7(x)'$
$=-2\cdot 3x^2-5\cdot 2x+7\cdot 1$
$=-6x^2-10x+7$

35 P.74 - 75 接線の方程式を求めよう！①

1 (1) $y=2x-6$　(2) $y=-x+2$

(3) $y=3x-5$　(4) $y=-\frac{2}{3}x+4$

2 (1) -4　(2) 11

3 (1) $y=3x+2$　(2) $y=5x-3$

4 (1) $(0、-5)$　(2) $y=2x-5$

解き方

1 (1) $y=2(x-3)+0$ より、$y=2x-6$

(2) $y=-1\cdot(x-0)+2$ より、$y=-x+2$

(3) 傾きが $\frac{10-1}{5-2}=3$ なので、

$y=3(x-2)+1$ より、$y=3x-5$

(4) 傾きが $\frac{0-4}{6-0}=-\frac{2}{3}$ なので、

$y=-\frac{2}{3}(x-0)+4$ より、$y=-\frac{2}{3}x+4$

2 (1) $y'=6x+2$ に、$x=-1$ を代入して、接線の傾きは、$6\cdot(-1)+2=-4$

(2) $y'=3x^2+2x-5$ に、$x=2$ を代入して、接線の傾きは、$3\cdot2^2+2\cdot2-5=11$

3 (1) $y'=-2x+5$ に、$x=1$ を代入して、接線の傾きは、$-2\cdot1+5=3$

したがって、接線の方程式は、

$y=3(x-1)+5$ より、$y=3x+2$

(2) $y'=3x^2+2x$ に、$x=1$ を代入して、接線の傾きは、$3\cdot1^2+2\cdot1=5$

したがって、接線の方程式は、

$y=5(x-1)+2$ より、$y=5x-3$

4 (1) $y'=6x+2$ に、$y'=2$ を代入して、

$6x+2=2$ より、$x=0$

$x=0$ を $y=3x^2+2x-5$ に代入して、

$y=-5$

(2) $y=2(x-0)-5$ より、$y=2x-5$

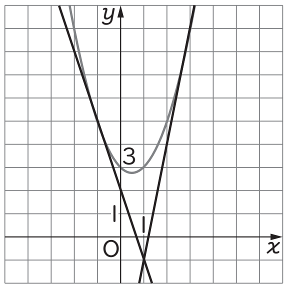
36 P.76 - 77 接線の方程式を求めよう！②

1 (1) $y=(2t-1)x-t^2+3$

(2) $t=-1、3$

(3) $y=-3x+2、y=5x-6$

(4)



2 (1) $y=(t^2-1)x-\frac{2}{3}t^3+2$

(2) $t=0、3$　(3) $y=8x-16$

解き方

1 (1) $y'=2x-1$ に、$x=t$ を代入して、接線の傾きは、$2t-1$ なので、接線の方程式は、

$y=(2t-1)(x-t)+t^2-t+3$ より、

$y=(2t-1)x-t^2+3$

(2) (1)の方程式に $x=1$、$y=-1$ を代入して、

$-1=(2t-1)\cdot1-t^2+3$

$t^2-2t-3=0$　$(t+1)(t-3)=0$　$t=-1, 3$

(3) $t=-1$ のとき、

$y=\{2\cdot(-1)-1\}x-(-1)^2+3$　$y=-3x+2$

$t=3$ のとき、

$y=(2\cdot3-1)x-3^2+3$　　$y=5x-6$

2 (1) $y'=x^2-1$ に、$x=t$ を代入して、接線の傾きは、t^2-1 なので、接線の方程式は、

$y=(t^2-1)(x-t)+\frac{1}{3}t^3-t+2$ より、

$y=(t^2-1)x-\frac{2}{3}t^3+2$

(2) (1)の方程式に $x=2$、$y=0$ を代入して、

$0=(t^2-1)\cdot2-\frac{2}{3}t^3+2$　　$0=2t^2-\frac{2}{3}t^3$

$3t^2-t^3=t^2(3-t)=0$　$t=0、3$

(3) $t=0$ のとき、$y=(0^2-1)x-\frac{2}{3}\cdot0^3+2$

$y=-x+2$…傾きが負

$t=3$ のとき、$y=(3^2-1)x-\frac{2}{3}\cdot3^3+2$

$y=8x-16$…傾きが正

37 P.78-79 確認問題⑤

1 (1) -4　(2) 2

2 (1) 3　(2) 5

3 7

4 $f'(x)=-2x+7$

5 (1) $y'=-10x$　(2) $y'=-27x^2$

(3) $y'=10x-1$　(4) $y'=-12x^2+6x$

6 $y=2x+1$

7 $y=14x$

解き方

3 $f'(-1)=\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{(-2x^2+3x)-\{-2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)\}}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{-2x^2+3x+5}{x+1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{-(2x^2-3x-5)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{-\cancel{(x+1)}(2x-5)}{\cancel{x+1}}$

$=\lim_{x\to-1}\{-(2x-5)\}=7$

4 $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{-(x+h)^2+7(x+h)-2\}-(-x^2+7x-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{-2xh-h^2+7h}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\cancel{h}(-2x-h+7)}{\cancel{h}}$

$=\lim_{h\to0}(-2x-h+7)=-2x+7$

6 $y'=3x^2-4x+3$ に、$x=1$ を代入して、接線の傾きは、$3\cdot1^2-4\cdot1+3=2$

したがって、接線の方程式は、

$y=2(x-1)+3$ より、$y=2x+1$

7 曲線上の点の座標を$(t,\ t^3+2t+16)$とします。$y'=3x^2+2$ に、$x=t$ を代入して、接線の傾きは、$3t^2+2$ なので、接線の方程式は、

$y=(3t^2+2)(x-t)+t^3+2t+16$

これが点$(0,\ 0)$を通るとき、

$0=(3t^2+2)(0-t)+t^3+2t+16$

$-2t^3+16=0$　　$t^3=8$　　$t=2$

したがって、接線の方程式は、

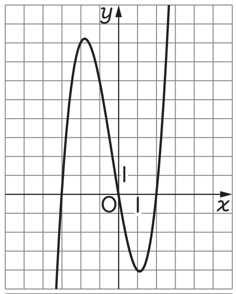
$y=(3\cdot2^2+2)(x-2)+2^3+2\cdot2+16$

$y=14x$

38 P.80-81 3次関数のグラフをかこう！①

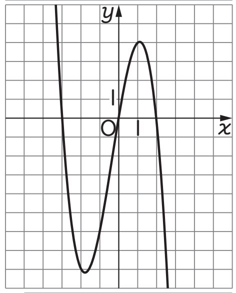
1 (1)

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	8	6	0	-4	0



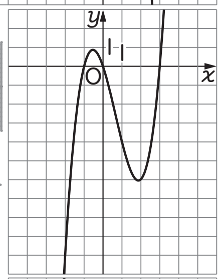
(2)

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	-8	-6	0	4	0



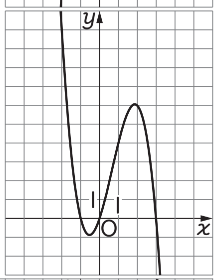
2 (1)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	0	0	-4	-6	0



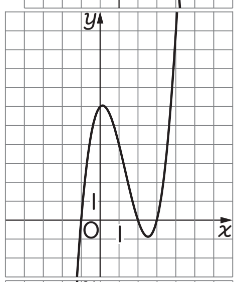
(2)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	10	0	0	4	6	0



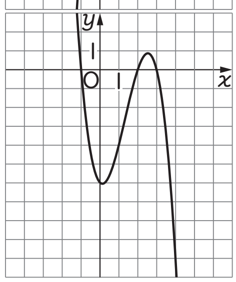
(3)

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	6	4	0	0	10



(4)

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	-6	-4	0	0	-10



39 P.82-83 3次関数のグラフをかこう！②

1 (1) $(x+3)(x^2-3x+3)$

(2) $(x+1)(4x^2-4x+5)$

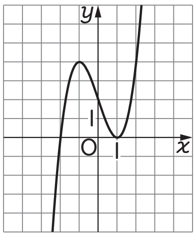
(3) $(x+1)(x-2)(x+3)$

(4) $(x+2)(3x^2-5x+4)$

2 (1) $(x+2)(x-1)^2$

(2)

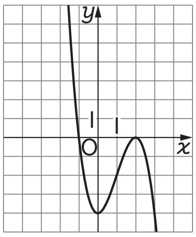
x	-2	-1	0	1	2
y	0	4	2	0	4



3 (1) $-(x-2)^2(x+1)$

(2)

x	-2	-1	0	1	2
y	16	0	-4	-2	0



解き方

1 (1) $f(x)=x^3-6x+9$ とおくと、

$f(-3)=(-3)^3-6\cdot(-3)+9=0$

であるから、$f(x)$ は $x+3$ で割り切れる。右のように割り算をすると、

$$\begin{array}{r}
x^2-3x+3 \\
x+3\,\overline{)\,x^3-6x+9} \\
\underline{x^3+3x^2} \\
-3x^2-6x \\
\underline{-3x^2-9x} \\
3x+9 \\
\underline{3x+9} \\
0
\end{array}$$

$f(x)$

$=(x+3)(x^2-3x+3)$

(3) $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とおくと、

$f(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=0$

であるから、$f(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

右のように割り算をすると、

$$\begin{array}{r}
x^2+\ x-6 \\
x+1\,\overline{)\,x^3+2x^2-5x-6} \\
\underline{x^3+\ x^2} \\
x^2-5x \\
\underline{x^2+\ x} \\
-6x-6 \\
\underline{-6x-6} \\
0
\end{array}$$

$f(x)$

$=(x+1)(x^2+x-6)$

$=(x+1)(x-2)(x+3)$

40 P.84-85 関数の増減を調べよう！

1 (1)

①

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{13}{2}$	↗

② $3<x$ で増加し、$x<3$ で減少する

(2)

①

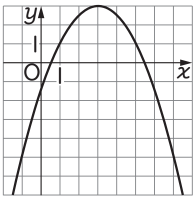
x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

② $x<\frac{1}{3}$、$1<x$ で増加し、$\frac{1}{3}<x<1$ で減少する

2 (1) ①

x	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	3	↘

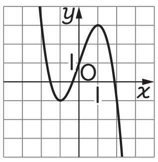
②



(2) ①

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-1	↗	3	↘

②



解き方

1 (1) ① $f'(x)=x-3$

$f'(x)=0$ の解は、$x=3$

(2) ① $f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

$f'(x)=0$ の解は、$x=\frac{1}{3}$、1

2 (1) ① $y'=-x+3$

$y'=0$ の解は、$x=3$

(2) ① $y'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ の解は、$x=1$、-1

41 P.86-87 極値を求めよう！

1 (1)

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

極大値 ない、極小値 -4

(2)

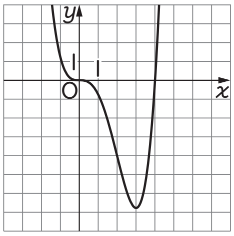
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{8}{3}$	↘	-8	↗

極大値 $\frac{8}{3}$、極小値 -8

2 $a<-2$、$2<a$

3 (1)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	$-\frac{27}{4}$	↗



(2) 極大値 ない、極小値 $-\frac{27}{4}$

解き方

1 (2) $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ を解くと、$x=-1$、3

$x<-1$、$3<x$ で増加、$-1<x<3$ で減少となる。増減表より、$x=-1$ で極大値 $\frac{8}{3}$、$x=3$ で極小値 -8 をとります。

2 2次方程式 $f'(x)=0$ の判別式をDとすると、

$f'(x)=3x^2+6ax+12$ より、

$D=(6a)^2-4\cdot3\cdot12=36a^2-144$

$=36(a^2-4)=36(a+2)(a-2)$

$D>0$ となるのは、$a<-2$、$2<a$

3 (1) $f'(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$

$f'(x)=0$ を解くと、$x=0$、3

42 P.88-89 最大値・最小値を求めよう！

1 (1)

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	-8	↗	-7

最大値 1、最小値 -8

(2)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	
y	14	↗	17	↘	-10

最大値 17、最小値 -10

(3)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗	$\frac{5}{2}$

最大値 ない、最小値 2

2 (1)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	$\frac{11}{6}$	↘	$\frac{5}{3}$	↗	$\frac{5}{2}$

最大値 $\frac{5}{2}$、最小値 1

(2)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	6	↘	2	↗	6	↘	2

最大値 6、最小値 2

(3)

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\frac{13}{3}$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗	$\frac{23}{3}$

最大値 ない、最小値 ない

解き方

1 (2) $y'=-6x+12=-6(x-2)$
$y'=0$ の解は、$x=2$
$x=2$ のとき極大値 $y=17$
$x=1$ のとき $y=14$、$x=5$ のとき $y=-10$
よって、$x=2$ で最大値17をとります。
また、端の値14と -10 を比べて、$x=5$ で最小値 -10 をとります。

(3) $y'=x-1$
$y'=0$ の解は、$x=1$
$x=1$ のとき極小値 $y=2$ で、最小値をとります。
また、区間が $0<x<2$ で、端点 $x=0$、$x=2$ は含まないので、最大値はありません。

2 (1) $y'=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
$y'=0$ の解は、$x=1$、2
$x=1$ のとき極大値 $y=\frac{11}{6}$
$x=2$ のとき極小値 $y=\frac{5}{3}$
$x=0$ のとき $y=1$、$x=3$ のとき $y=\frac{5}{2}$
よって、端の値 $\frac{5}{2}$ と極大値 $\frac{11}{6}$ を比べて、$x=3$ で最大値 $\frac{5}{2}$ をとります。
また、端の値1と極小値 $\frac{5}{3}$ を比べて、$x=0$ で最小値1をとります。

(3) $y'=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$
$y'=0$ の解は、$x=1$、3
$x=1$ のとき極大値 $y=\frac{7}{3}$
$x=3$ のとき極小値 $y=1$
区間が $-1<x<5$ で、端点 $x=-1$、$x=5$ は含まないので、最大値も最小値もありません。

43 P.90-91 最大値・最小値を利用して身近な問題を解いてみよう！

1 (1) 縦…$(10-2x)$cm、横…$(16-2x)$cm
(2) $y=(10-2x)(16-2x)x$
xの範囲…$0<x<5$
(3)

x	0	…	2	…	5
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	144	↘	0

(4) yの最大値…144(cm^3)、$x=2$

2 (1) $2\pi x$ cm　(2) $h=\frac{36-x^2}{x}$
(3) $y=\pi x(36-x^2)$
xの範囲…$0<x<6$
(4)

x	0	…	$2\sqrt{3}$	…	6
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$48\sqrt{3}\pi$	↘	0

(5) y の最大値…$48\sqrt{3}\pi$(cm^3)、$x=2\sqrt{3}$

解き方

1 (2) 体積＝縦×横×高さ の式にあてはめます。
また、縦と横の長さ、高さは0より大きいから、$x>0$、$10-2x>0$、$16-2x>0$
これらの不等式を解くと、$0<x<5$

(3) $y=(10-2x)(16-2x)x$
$=4x^3-52x^2+160x$
$y'=12x^2-104x+160$
$=4(3x^2-26x+40)$
$=4(3x-20)(x-2)$
$y'=0$ を解くと、$x=2$、$\frac{20}{3}$
$0<x<5$ より、$x=2$

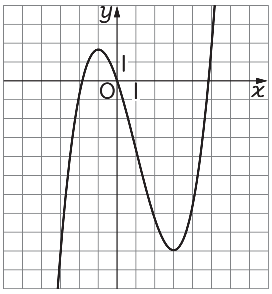
2 (1) 側面の長方形の横の長さ は、底面の円の円周の長さに等しいことを使います。
(2) 表面積＝底面積×2＋側面積 の式にあてはめると、$72\pi=\pi x^2\times2+h\times2\pi x$
これをhの式で表します。
(3) 体積＝底面積×高さ の式にあてはめると、
$y=\pi x^2\times h=\pi x^2\times\frac{36-x^2}{x}=\pi x(36-x^2)$
(4) $y'=36\pi-3\pi x^2=-3\pi(x^2-12)$
$=-3\pi(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$

0001-0047_1_大人の数学_2次関数と微分積分編_KK.indd 23 2023/10/06 18:45:40

44 P.92-93 方程式の実数解の個数を求めよう！

1 (1)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{5}{3}$	↘	-9	↗



(2) 極大値 $\frac{5}{3}$、極小値 -9

(3) 3個

2 (1)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

極大値 3、極小値 -1

(2) 3個

3 (1)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗

極大値 0、極小値 $-\frac{32}{27}$

(2) 2個

解き方

1 (1) $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$ を解くと、$x=-1$、3

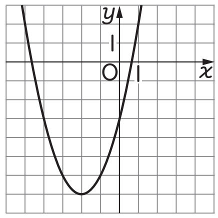
2 (1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$ を解くと、$x=-1$、1

3 (1) $f'(x)=3x^2+8x+4=(x+2)(3x+2)$
$f'(x)=0$ を解くと、$x=-2$、$-\frac{2}{3}$

45 P.94-95 確認問題⑥

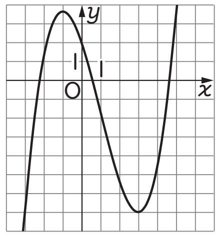
1 (1)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-7	↗



(2)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{11}{3}$	↘	-7	↗



2

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

極大値 0、極小値 -4

3 (1) $r=\sqrt{9-x^2}$

(2) $y=2\pi x(9-x^2)$、x の範囲…$0<x<3$

(3)

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$12\sqrt{3}\pi$	↘	0

(4) y の最大値…$12\sqrt{3}\pi$、$x=\sqrt{3}$

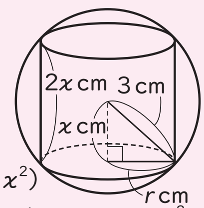
解き方

1 (1) $y'=2x+4$　$y'=0$ を解くと、$x=-2$

(2) $y'=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$
$y'=0$ を解くと、$x=-1$、3

2 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$ を解くと、$x=0$、2

3 (1) 右の図の直角三角形において、三平方の定理より、$3^2=x^2+r^2$
$r^2=9-x^2$　$r=\sqrt{9-x^2}$



(2) $y=\pi r^2\times 2x=2\pi x(9-x^2)$

(3) $y=18\pi x-2\pi x^3$ より、$y'=18\pi-6\pi x^2$
$y'=0$ を解くと、$x^2=3$
$0<x<3$ より、$x=\sqrt{3}$

46 P.96-97 不定積分って何？

＊ これ以降は、「Cは積分定数とする」は省略する。

1 (1) ア、オ (2) ウ、エ

2 (1) x^3+C (2) $\frac{1}{2}x^2-2x+C$

(3) $\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+C$ (4) $2x^3+4x^2+x+C$

(5) $\frac{2}{3}x^3-x+C$ (6) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

解き方

1 (1) ア $(3x^2)'=6x$　イ $(2x^3)'=6x^2$

ウ $(x^3)'=3x^2$　エ $(2x^3+2)'=6x^2$

オ $(3x^2-1)'=6x$

2 (2) $\int(x-2)dx=\int xdx+\int(-2)dx$

$=\int xdx-2\int 1dx=\frac{1}{2}x^2-2x+C$

(3) $\int(x^2-2x+3)dx$

$=\int x^2dx+\int(-2x)dx+\int 3dx$

$=\int x^2dx-2\int xdx+3\int 1dx$

$=\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{1}{2}x^2+3\cdot x+C$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+C$

(4) $\int(6x^2+8x+1)dx$

$=\int 6x^2dx+\int 8xdx+\int 1dx$

$=6\int x^2dx+8\int xdx+\int 1dx$

$=6\cdot\frac{1}{3}x^3+8\cdot\frac{1}{2}x^2+x+C$

$=2x^3+4x^2+x+C$

(5) $\int(2x^2-1)dx=\int 2x^2dx+\int(-1)dx$

$=2\int x^2dx-\int 1dx=2\cdot\frac{1}{3}x^3-x+C$

$=\frac{2}{3}x^3-x+C$

(6) $\int(x^2+x+1)dx=\int x^2dx+\int xdx+\int 1dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

47 P.98-99 不定積分を求めよう！

1 (1) $\frac{1}{3}x^3+x^2+C$ (2) $\frac{1}{3}x^3-x+C$

(3) $\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$ (4) x^3-x^2-x+C

(5) $3x^3-6x^2+4x+C$

(6) $\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-4x+C$

2 (1) $f(x)=-x^2+3x-2$

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$

(3) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-1$ (4) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$

解き方

1 (1) $\int x(x+2)dx=\int(x^2+2x)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$

(2) $\int(x+1)(x-1)dx=\int(x^2-1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x+C$

(3) $\int(x-1)^2dx=\int(x^2-2x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$

(4) $\int(x-1)(3x+1)dx$

$=\int(3x^2-2x-1)dx=x^3-x^2-x+C$

(5) $\int(3x-2)^2dx=\int(9x^2-12x+4)dx$

$=3x^3-6x^2+4x+C$

2 (1) $f(x)=\int(-2x+3)dx=-x^2+3x+C$

$f(1)=-1+3+C=0$ より、$C=-2$ となるので、$f(x)=-x^2+3x-2$

(3) $f(x)=\int(-x)dx=-\frac{1}{2}x^2+C$

$f(0)=-0+C=-1$ より、$C=-1$ となるので、$f(x)=-\frac{1}{2}x^2-1$

(4) $f(x)=\int(x^2+2x)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$

$f(1)=\frac{1}{3}+1+C=1$ より、$C=-\frac{1}{3}$ となるので、$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$

0001-0047_1_大人の数学_2次関数と微分積分編_KK.indb 25 2023/10/06 18:45:41

48 P.100-101 定積分を求めよう！①

1 (1) $\frac{1}{3}$　(2) 10　(3) 15　(4) $\frac{28}{3}$

(5) -15　(6) $-\frac{16}{3}$　(7) $-\frac{9}{2}$　(8) 9

(9) 52　(10) $\frac{11}{6}a^3$

解き方

1 (1) $\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot1^3-\frac{1}{3}\cdot0^3=\frac{1}{3}$

(2) $\int_1^3(2x+1)dx=[x^2+x]_1^3$

$=(3^2+3)-(1^2+1)=10$

(3) $\int_{-1}^2(3x^2+2x+1)dx=[x^3+x^2+x]_{-1}^2$

$=(2^3+2^2+2)-\{(-1)^3+(-1)^2-1\}=15$

(4) $\int_{-2}^2(x+1)^2dx=\int_{-2}^2(x^2+2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-2}^2$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot2^3+2^2+2\right)-\left\{\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+(-2)^2-2\right\}$

$=\frac{28}{3}$

(6) $\int_2^3(-x^2+1)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_2^3$

$=\left(-\frac{1}{3}\cdot3^3+3\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot2^3+2\right)=-\frac{16}{3}$

(7) $\int_{-1}^2(x+1)(x-2)dx=\int_{-1}^2(x^2-x-2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^2$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot2^3-\frac{1}{2}\cdot2^2-2\cdot2\right)$

$-\left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)\right\}=-\frac{9}{2}$

(8) $\int_0^3(x-3)^2dx=\int_0^3(x^2-6x+9)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot3^3-3\cdot3^2+9\cdot3\right)-(0-0+0)=9$

(10) $\int_0^a(x^2+ax+a^2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+a^2x\right]_0^a$

$=\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3+a^3\right)-(0+0+0)=\frac{11}{6}a^3$

49 P.102-103 定積分を求めよう！②

1 (1) 6　(2) -5

2 (1) -9　(2) $\frac{1}{2}$　(3) 3　(4) -1

(5) 28　(6) $\frac{5}{6}a^3+\frac{1}{2}a-\frac{4}{3}$

解き方

2 (1) $\int_{-1}^2(3x^2+x-2)dx-\int_{-1}^2(3x^2-x+2)dx$

$=\int_{-1}^2\{(3x^2+x-2)-(3x^2-x+2)\}dx$

$=\int_{-1}^2(2x-4)dx=[x^2-4x]_{-1}^2$

$=(2^2-4\cdot2)-\{(-1)^2-4\cdot(-1)\}=-9$

(2) $2\int_1^2(x+3)dx-3\int_1^2(x^2-x+2)dx$

$=\int_1^2\{2(x+3)-3(x^2-x+2)\}dx$

$=\int_1^2(2x+6-3x^2+3x-6)dx$

$=\int_1^2(-3x^2+5x)dx=\left[-x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_1^2$

$=\left(-2^3+\frac{5}{2}\cdot2^2\right)-\left(-1^3+\frac{5}{2}\cdot1^2\right)$

$=\frac{1}{2}$

(3) $\int_{-1}^2(x^2+x)dx-\int_{-1}^2(2x+1)dx$

$-\int_{-1}^2(x^2-x-2)dx$

$=\int_{-1}^2\{(x^2+x)-(2x+1)-(x^2-x-2)\}dx$

$=\int_{-1}^2(x^2+x-2x-1-x^2+x+2)dx$

$=\int_{-1}^2 1dx=[x]_{-1}^2=2-(-1)=3$

(6) $\int_1^a(x^2+ax+a^2)dx+\int_1^a(x-a)(3x+a)dx$

$=\int_1^a\{(x^2+ax+a^2)+(3x^2-2ax-a^2)\}dx$

$=\int_1^a(4x^2-ax)dx=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_1^a$

$=\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)-\left(\frac{4}{3}\cdot1^3-\frac{1}{2}a\cdot1^2\right)$

$=\frac{5}{6}a^3+\frac{1}{2}a-\frac{4}{3}$

50 P.104-105 定積分を求めよう！③

1 (1) $\frac{8}{3}$　(2) 6　(3) 0　(4) $-\frac{1}{6}$

(5) 20　(6) $\frac{28}{3}$　(7) 6　(8) 25

解き方

1 (4) $\int_1^3 (x^2-3x+2)dx-\int_2^3 (x^2-3x+2)dx$

$=\int_1^3 (x^2-3x+2)dx+\int_3^2 (x^2-3x+2)dx$

$=\int_1^2 (x^2-3x+2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2\right)$

$-\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{3}{2}\cdot 1^2+2\cdot 1\right)=-\frac{1}{6}$

(5) $\int_{-2}^2 (3x^2-x+1)dx=2\int_0^2 (3x^2+1)dx$

$=\int_0^2 (6x^2+2)dx=[2x^3+2x]_0^2$

$=(2\cdot 2^3+2\cdot 2)-(0+0)=20$

(6) $\int_{-1}^1 (x^2-x+1)dx+\int_1^2 (x^2-x+1)dx$

$+\int_2^3 (x^2-x+1)dx$

$=\int_{-1}^3 (x^2-x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^3$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{1}{2}\cdot 3^2+3\right)$

$-\left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2-1\right\}=\frac{28}{3}$

(7) $\int_{-2}^1 x(x-1)dx+\int_{-2}^1 x(x+1)dx$

$=\int_{-2}^1 \{(x^2-x)+(x^2+x)\}dx=\int_{-2}^1 2x^2dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^1=\frac{2}{3}\cdot 1^3-\frac{2}{3}\cdot(-2)^3=6$

(8) $\int_{-1}^1 (3x^2-1)dx-\int_2^1 (3x^2-1)dx$

$+\int_2^3 3x^2dx$

$=\int_{-1}^2 (3x^2-1)dx+\int_2^3 3x^2dx$

$=\int_{-1}^3 3x^2dx+\int_{-1}^2 (-1)dx$

$=[x^3]_{-1}^3+[-x]_{-1}^2=25$

51 P.106-107 定積分と微分の関係を利用しよう！

1 (1) $f'(x)=x^2+3x+4$

(2) $f'(x)=2x+3$　(3) $f'(x)=3x-1$

(4) $f'(x)=-x^2+x$

2 (1) $f(x)=2x-1$　(2) $a=-2$

3 (1) $f(x)=2x+1$　(2) $a=-3$、2

解き方

1 a を定数とするとき、$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ が成り立つことを使います。

(4) $f(x)=\int_x^1 (t^2-t)dt=-\int_1^x (t^2-t)dt$

両辺を x で微分すると、

$f'(x)=-(x^2-x)=-x^2+x$

2 (2) ①の両辺に $x=-1$ を代入すると、

左辺$=\int_{-1}^{-1} f(t)dt=0$、

右辺$=(-1)^2-(-1)+a$ となるから、

$0=1+1+a$ より、$a=-2$

3 (2) ①の両辺に $x=a$ を代入すると、

左辺$=\int_a^a f(t)dt=0$、

右辺$=a^2+a-6$ となるから、

$0=a^2+a-6$ より、$(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$、2

52 P.108-109 確認問題⑦

1 (1) x^2+3x+C　(2) $2x^3-4x^2+2x+C$

2 $f(x)=x^3+x^2+x-1$

3 (1) 15　(2) $-\frac{4}{3}$

4 (1) $\frac{22}{3}$　(2) 24

5 $\frac{33}{2}$

6 (1) $f(x)=2x+a$　(2) $a=2$

解き方

2 $f(x)=\int(3x^2+2x+1)dx=x^3+x^2+x+C$

$f(1)=1+1+1+C=2$ より、$C=-1$ となるので、$f(x)=x^3+x^2+x-1$

3 (1) $\int_{-2}^{1}(2x^2-4x+1)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+x\right]_{-2}^{1}=15$

(2) $\int_{1}^{3}(x-1)(x-3)dx$

$=\int_{1}^{3}(x^2-4x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{1}^{3}=-\frac{4}{3}$

4 (2) $2\int_{-1}^{3}(2x^2+x-1)dx-\int_{-1}^{3}(x^2+x)dx$

$=\int_{-1}^{3}\{2(2x^2+x-1)-(x^2+x)\}dx$

$=\int_{-1}^{3}(4x^2+2x-2-x^2-x)dx$

$=\int_{-1}^{3}(3x^2+x-2)dx$

$=\left[x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{3}=24$

5 $\int_{0}^{1}(x^2+x+1)dx+\int_{2}^{3}(x^2+x+1)dx$

$-\int_{2}^{1}(x^2+x+1)dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+x+1)dx+\int_{2}^{3}(x^2+x+1)dx$

$+\int_{1}^{2}(x^2+x+1)dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+x+1)dx+\int_{1}^{2}(x^2+x+1)dx$

$+\int_{2}^{3}(x^2+x+1)dx$

$=\int_{0}^{3}(x^2+x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{3}$

$=\frac{33}{2}$

6 (2) ①の両辺に $x=1$ を代入すると、

左辺$=\int_{1}^{1}f(t)dt=0$、右辺$=1^2+a\cdot1-3$

となるから、$0=1+a-3$ より、$a=2$

53 定積分を使って面積を求めよう！①

P.110 - 111

1 (1) 20　(2) 12

2 (1) $\frac{38}{3}$　(2) 6

(3) $\frac{52}{3}$　(4) $\frac{31}{3}$

解き方

1 (1) $S=\int_{0}^{4}(2x+1)dx=[x^2+x]_{0}^{4}$

$=(4^2+4)-(0+0)=20$

(2) $S=\int_{-1}^{3}(-x+4)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{3}$

$=-\frac{1}{2}\cdot3^2+4\cdot3-\left\{-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)\right\}$

$=12$

2 (1) $S=\int_{0}^{2}(x^2+5)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+5x\right]_{0}^{2}$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot2^3+5\cdot2\right)-(0+0)=\frac{38}{3}$

(2) $S=\int_{-1}^{1}(3x^2+4x+2)dx$

$=[x^3+2x^2+2x]_{-1}^{1}$

$=1^3+2\cdot1^2+2\cdot1$

$-\{(-1)^3+2\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)\}$

$=6$

(3) $S=\int_{2}^{4}(-x^2+4x+6)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{2}^{4}$

$=-\frac{1}{3}\cdot4^3+2\cdot4^2+6\cdot4$

$-\left(-\frac{1}{3}\cdot2^3+2\cdot2^2+6\cdot2\right)$

$=\frac{52}{3}$

(4) $S=\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-2x+7\right)dx$

$=\left[\frac{1}{6}x^3-x^2+7x\right]_{1}^{3}$

$=\frac{1}{6}\cdot3^3-3^2+7\cdot3-\left(\frac{1}{6}\cdot1^3-1^2+7\cdot1\right)$

$=\frac{31}{3}$

54 P.112 - 113 定積分を使って面積を求めよう！②

1 (1) $x=-1$、2　(2) $\frac{9}{2}$

2 (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(3) $\frac{9}{8}$　(4) $\frac{4}{27}$

解き方

1 (1) $-x^2+x+2=0$ を解くと、$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$　　$x=-1$、2

(2) $S=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2$

$-\left\{-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)\right\}$

$=\frac{9}{2}$

2 (1) $x^2-3x+2=0$ を解くと、

$(x-1)(x-2)=0$　　$x=1$、2

$S=\int_{1}^{2}\{-(x^2-3x+2)\}dx$

$=-\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)dx=\frac{1}{6}(2-1)^3=\frac{1}{6}$

(3) $2x^2-5x+2=0$ を解くと、

$(2x-1)(x-2)=0$　　$x=\frac{1}{2}$、2

$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{-(2x^2-5x+2)\right\}dx$

$=-2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)dx$

$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{8}$

(4) $-3x^2+4x-1=0$ を解くと、

$-(3x^2-4x+1)=-(3x-1)(x-1)=0$

$x=\frac{1}{3}$、1

$S=\int_{\frac{1}{3}}^{1}(-3x^2+4x-1)dx$

$=-3\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)dx$

$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$

55 P.114 - 115 定積分を使って面積を求めよう！③

1 (1) 12　(2) $\frac{16}{3}$

2 (1) $x=-3$、2　(2) $\frac{125}{6}$

3 (1) $x=-2$、2　(2) 13

解き方

1 (1) $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲では、$3x-1\leqq -x+5$ であるから、

$S=\int_{-1}^{1}\{(-x+5)-(3x-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(-4x+6)dx=[-2x^2+6x]_{-1}^{1}=12$

(2) $0\leqq x\leqq 2$ の範囲では、$x^2-2x\leqq x+1$ であるから、

$S=\int_{0}^{2}\{(x+1)-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_{0}^{2}(-x^2+3x+1)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{0}^{2}=\frac{16}{3}$

2 (1) $-x^2=x-6$ を解くと、$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$　　$x=-3$、2

(2) $-3\leqq x\leqq 2$ の範囲では、$x-6\leqq -x^2$ であるから、

$S=\int_{-3}^{2}\{(-x^2)-(x-6)\}dx$

$=\int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-3}^{2}=\frac{125}{6}$

3 (1) $x^2+2x-1=2x+3$ を解くと、$x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$　　$x=-2$、2

(2) $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲では、

$x^2+2x-1\leqq 2x+3$、$2\leqq x\leqq 3$ の範囲では、

$2x+3\leqq x^2+2x-1$ であるから、求める面積の和は、

$\int_{-2}^{2}\{(2x+3)-(x^2+2x-1)\}dx$

$+\int_{2}^{3}\{(x^2+2x-1)-(2x+3)\}dx$

$=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{2}^{3}=13$

56 P.116-117 定積分を求めよう！④

1 (1) $\frac{5}{2}$　(2) $\frac{29}{2}$

2 (1) 16　(2) 1　(3) $\frac{11}{6}$

解き方

1 (1) $|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x\geqq 2 \text{ のとき}) \\ -(x-2) & (x<2 \text{ のとき}) \end{cases}$

なので、

$$\int_0^3 |x-2|dx$$
$$=\int_0^2 \{-(x-2)\}dx+\int_2^3 (x-2)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

2 (1) $|x^2-4|$

$$=\begin{cases} x^2-4 & (x\leqq -2、2\leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2-4) & (-2<x<2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので、

$$\int_0^4 |x^2-4|dx$$
$$=\int_0^2 \{-(x^2-4)\}dx+\int_2^4 (x^2-4)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^4$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{32}{3}=16$$

(3) $|(x-1)(x-2)|$

$$=\begin{cases} (x-1)(x-2) & (x\leqq 1、2\leqq x \text{ のとき}) \\ -(x-1)(x-2) & (1<x<2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので、

$$\int_0^3 |(x-1)(x-2)|dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-3x+2)dx+\int_1^2 \{-(x^2-3x+2)\}dx+\int_2^3 (x^2-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_2^3$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

57 P.118-119 速度と道のりを求めよう！

1 (1) $v(t)=5$　(2) $v(t)=6t^2-4$

2 (1) 3秒後　(2) 45 m

3 (1) 6　(2) $\frac{13}{2}$

4 (1) 28　(2) 1

解き方

1 (1) $v(t)=f'(t)=5$

(2) $v(t)=f'(t)=6t^2-4$

2 (1) 投げ上げたボールが落ち始めるのは、ボールが最高点に到達するときで、ボールの速度は0になります。$v(t)=0$ を解くと、

$30-10t=0$　$t=3$(秒後)

(2) 真上に投げ上げたボールが最高点に到達するまでの道のりは、$t=0$ から $t=3$ までにボールが移動した道のりに等しいので、

$$\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3 (30-10t)dt$$
$$=[30t-5t^2]_0^3=45(\text{m})$$

3 (1) $0+\int_0^3 (2t-1)dt=0+[t^2-t]_0^3=6$

(2) $\int_0^3 |v(t)|dt=\int_0^3 |2t-1|dt$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}} (2t-1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^3 (2t-1)dt$$
$$=-[t^2-t]_0^{\frac{1}{2}}+[t^2-t]_{\frac{1}{2}}^3=\frac{13}{2}$$

4 (1) $-2+\int_0^6 (t-1)(t-2)dt$

$$=-2+\int_0^6 (t^2-3t+2)dt$$
$$=-2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^6=28$$

(2) $\int_0^2 |(t-1)(t-2)|dt$

$$=\int_0^1 (t-1)(t-2)dt-\int_1^2 (t-1)(t-2)dt$$
$$=\int_0^1 (t^2-3t+2)dt-\int_1^2 (t^2-3t+2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_1^2=1$$

58 P.120-121 確認問題⑧

1 21

2 $\frac{9}{8}$

3 8

4 (1) $x=-3$、-1　(2) $\frac{4}{3}$

5 $\frac{5}{2}$

6 (1) $-\frac{9}{2}$　(2) $\frac{31}{6}$

解き方

1 $S=\int_0^3(3x^2-2x+1)dx=[x^3-x^2+x]_0^3$

$=(3^3-3^2+3)-(0-0+0)=21$

2 $-2x^2-x+1=0$ を解くと、$2x^2+x-1=0$

$(2x-1)(x+1)=0$　$x=-1$、$\frac{1}{2}$

$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(-2x^2-x+1)dx$

$=-2\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)dx$

$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{1}{2}-(-1)\right\}^3=\frac{9}{8}$

3 $0\leqq x\leqq 2$ の範囲では、$3x^2-4x+1\leqq 3x+2$ であるから、

$S=\int_0^2\{(3x+2)-(3x^2-4x+1)\}dx$

$=\int_0^2(-3x^2+7x+1)dx=\left[-x^3+\frac{7}{2}x^2+x\right]_0^2$

$=8$

5 $|2x-3|=\begin{cases}2x-3 & \left(x\geqq\frac{3}{2}\text{ のとき}\right)\\ -(2x-3) & \left(x<\frac{3}{2}\text{ のとき}\right)\end{cases}$

$\int_1^3|2x-3|dx$

$=\int_1^{\frac{3}{2}}\{-(2x-3)\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^3(2x-3)dx$

$=-[x^2-3x]_1^{\frac{3}{2}}+[x^2-3x]_{\frac{3}{2}}^3=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$

6 (1) $0+\int_0^3(t^2-3t)dt$

$=0+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^3=-\frac{9}{2}$

(2) $\int_1^4|t^2-3t|dt=\int_1^4|t(t-3)|dt$

$=-\int_1^3(t^2-3t)dt+\int_3^4(t^2-3t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^4$

$=\frac{10}{3}+\frac{11}{6}=\frac{31}{6}$

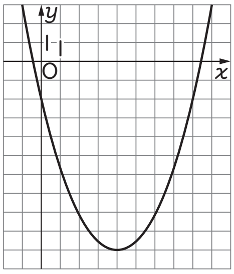
59 P.122-123 微分・積分のまとめ①

1 (1) 3　(2) 3

2 (1) $y'=-10x+4$　(2) $y'=-3x^2+4x-6$

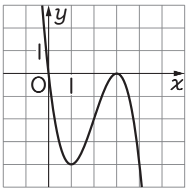
3 (1)

x	…	4	…
y'	−	0	+
y	↘	−10	↗



(2)

x	…	1	…	3	…
y'	−	0	+	0	−
y	↘	−4	↗	0	↘



4 (1)

x	−2	…	$-\frac{3}{2}$	…	1
y'		−	0	+	
y	−3	↘	$-\frac{7}{2}$	↗	9

最大値 9、最小値 $-\frac{7}{2}$

(2)

x	−2	…	0	…	2	…	3
y'		−	0	+	0	−	
y	21	↘	1	↗	5	↘	1

最大値 21、最小値 1

5 (1) 15　(2) $\frac{188}{3}$

0001-0047_1_大人の数学_2次関数と微分積分編_KK.indb　31　2023/10/06　18:45:44

60 P.124-125 微分・積分のまとめ②

1 (1) -1　(2) 9

2 (1) $y=-2x+8$　(2) $y=-x+4$

3 (1)

x	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-13	↗

極大値 ない
極小値 -13

(2)

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	16	↗

極大値 20、極小値 16

4 (1) $-\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+C$

(2) $\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$

5 (1) $-\frac{2}{3}$　(2) $\frac{20}{3}$

6 (1) $f(x)=2ax+2$　(2) $a=3$

解き方

1 (2) $\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}$

$=\frac{2\cdot4^2+3\cdot4-\{2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)\}}{4-(-1)}$

$=9$

2 (2) 傾きが $\frac{8-5}{-4-(-1)}=-1$ なので、

$y=-\{x-(-1)\}+5$ より、$y=-x+4$

4 (2) $\int(2x-1)^2dx=\int(4x^2-4x+1)dx$

$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$

5 (1) $\int_0^2(2x^2-3)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x\right]_0^2$

$=\left(\frac{2}{3}\cdot2^3-3\cdot2\right)-(0-0)=-\frac{2}{3}$

(2) $\int_{-1}^{1}(x^2+4x+3)dx=2\int_0^1(x^2+3)dx$

$=2\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}\cdot1^3+3\cdot1\right)-(0+0)$

$=\frac{20}{3}$

6 (2) ①の両辺に $x=-1$ を代入すると、

左辺 $=\int_{-1}^{-1}f(t)dt=0$、

右辺 $=a\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-1$ となるから、$0=a-3$ より、$a=3$

2311R1
0001-0047_1_大人の数学_2次関数と微分積分編_KK.indb　32　2023/10/06　18:45:44